

U. Morel

1960

UNTERSUCHUNG DER KOLLEKTIVEN POTENTIALENERGIEFLÄCHE
VON ATOMKERNEN - SUPERSCHWERE ELEMENTE

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT

ZU

FRANKFURT AM MAIN

VORGELEGT VON

ULRICH MOSEL

AUS

HANNOVER

FRANKFURT A.M., 1968

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. H. Berckhemer
Erster Berichterstatter: Prof. Dr. W. Greiner
Zweiter Berichterstatter: Priv. Doz. Dr. M. G. Huber

Tag der mündlichen Prüfung: 19. 12. 68
und Promotion

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Begriff der Potentialenergiefläche	3
III. Mikroskopische Bestimmung der Potential- energiefläche	5
IV. Numerische Durchführung der Theorie	18
V. Bedeutung der Restwechselwirkungen für die Potentialenergiefläche, Vergleich mit dem Experiment	21
VI. Vergleich mit Berechnungen der Potential- energiefläche im Paar- + Quadrupol-Kraft Modell	28
VII. Stabilität und Struktur superschwerer Atomkerne	32
VIII. Zusammenfassung	45
<u>Anhang 1</u> : Diagonalisierung des Schalenmodell- Hamiltonoperators	47
<u>Anhang 2</u> : Lösung der BCS-Gleichung	51
Literaturnachweis	55
Tabellen	57
Abbildungen	62

I. Einleitung

Die Spektren schwerer Kerne zeigen eine Anzahl von Zuständen, deren Energie, Quadrupolmoment und γ -Übergangswahrscheinlichkeit nur durch die kohärente Anregung sehr vieler Nukleonen erklärt werden können.

Da die Methoden der Vielteilchenphysik zur Beschreibung dieser Zustände wesentlich zu aufwendig sind, muß man versuchen, durch einen Modellansatz die Anzahl der freien Variablen des Nukleonensystems zu reduzieren. Beschränkt man sich auf das Niederenergiespektrum der schweren Kerne, so können infolge des Pauliprinzip nur die äußeren Nukleonen nahe der Fermikante an diesen Anregungen beteiligt sein. Durch ihre Dichteverteilung wird also wesentlich der Kernrand und damit die Kerngestalt beeinflusst. Außerdem führen infolge der hohen Inkompressibilität der Kernmaterie die bei einer Anregung auftretenden Dichteschwankungen zwangsläufig zu Gestaltsveränderungen.

Durch diese Gedanken geleitet, wurde 1950 von Bohr und Mottelson das Kollektivmodell entwickelt,¹⁾ das die oben genannten kohärenten Anregungen auf Gestaltsveränderungen des Kernes zurückführt. Die Parameter der Kernoberfläche spielen hier die Rolle von freien Variablen. Dieses Modell, insbesondere in seiner Weiterentwicklung durch Fäessler und Greiner, kann die auffallenden Eigenschaften der Kollektivzustände recht gut erklären. In seine numerische Auswertung geht aber immer eine wesentliche Vereinfachung ein: Um die Lösbarkeit der zugehörigen Schrödingergleichung zu gewährleisten, wird die potentielle Energie als eine Potenzreihenentwicklung nur bis zu Gliedern 2. Ordnung um das Minimum herum angesetzt. Zudem müssen zur Berechnung von Zuständen die wesentlichen experimentellen Größen: die Grundzustandsdeformation β_0 , die Energien der Vibrationsbandenköpfe und das Trägheitsmoment als Parameter dem Experiment entnommen werden.

Deshalb bedeutete es einen wirklichen Fortschritt, als einige der Kollektivparameter auf der Basis des Schalenmodells berechnet werden konnten. Allerdings zeigen diese Rechnungen auch einen großen Nachteil. Die anschauliche Bedeutung, die man durch die Annahme von Gestaltsveränderungen des Kerns erreicht hatte, geht in diesen Theorien verloren.

Deshalb soll im Folgenden zuerst das Konzept der Potentialenergiefläche eines Kernes entwickelt werden und dargelegt werden, wie aus der Kenntnis dieser Fläche unmittelbar Aussagen über die Gestalt von Kernen und Prozesse, die mit ihrer Veränderung zusammenhängen, gewonnen werden können. Damit wird die Behandlung aller kollektiven Oberflächenprozesse in ein einheitliches Bild zusammengefaßt. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird dann gezeigt werden, wie diese Fläche auf der Grundlage eines Schalenmodells berechnet werden kann. Es wird also zwischen den Ausgangspunkt kohärenter Anregungen im Schalenmodell und die Ergebnisse dieser Theorie der Begriff der Potentialenergiefläche (PES) quasi eingeschoben, um die anschauliche Bedeutung der Ergebnisse wiederherzustellen. Im dritten Teil dieser Arbeit wird dann diese Theorie an dem kollektiven Verhalten der Kerne im Bereich der Seltenen Erden getestet. Gleichzeitig lassen sich dabei Aussagen über die Struktur dieser Anregungen gewinnen. Die gute Übereinstimmung dieser Aussagen über die Grundzustandsstruktur der PES legt es dann nahe, auch Lage und Gestalt der Spaltbarrieren von sehr schweren Atomkernen zu bestimmen, um so Aussagen über deren Lebensdauer zu erhalten. Im vierten und letzten Teil dieser Arbeit wird deshalb mit Hilfe der Potentialenergiefläche ausführlich die Struktur und die Stabilität superschwerer Atomkerne diskutiert werden.

II. Begriff der Potentialenergiefläche

Unter der Potentialenergiefläche eines Kernes verstehen wir im Folgenden die gesamte Energie des Kernes in Abhängigkeit von einem Satz von Parametern $\hat{\alpha}$, die die Kerngestalt festlegen. Diese Potentialenergiefläche $E(\hat{\alpha})$ stellt dann in einem Kollektivmodellansatz für den Kernhamiltonoperator die potentielle Energie dar:

$$H(\hat{\alpha}) = T(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}) + V(\hat{\alpha}) \quad (1)$$

mit: $V(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha}) \quad (2)$

Hierbei stellt $T(\hat{\alpha}, \hat{\alpha})$ die kinetische Energie der kollektiven Bewegung dar. In der Abb. 1a sind für den einfachsten Fall nur eines Deformationsparameters die in $E(\hat{\alpha})$ enthaltenen wesentlichsten Informationen über das kollektive Verhalten der Kerne zusammengestellt. Kennt man also $E(\hat{\alpha})$ für einen Kern, so ist unmittelbar klar, daß alle statischen Eigenschaften dieses Kernes sich unmittelbar angeben lassen; dies sind insbesondere die Grundzustandsgestalt des Kernes und ihre Stabilität, Höhe und Gestalt der Spaltbarriere und die Härte des Kernes gegenüber Gestaltsveränderungen durch äußere Anregungen.

Um $E(\hat{\alpha})$ näher untersuchen zu können, müssen die Oberflächenparameter spezifiziert werden. Da die Erfolge des Kollektivmodelles gezeigt haben, daß sich die Kerngestalt in den niedrig angeregten Zuständen in guter Näherung beschreiben läßt durch:

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^{+2} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\vartheta, \varphi) \right) \quad (3)$$

liegt es nahe, ebenfalls die fünf Deformationsparameter $\{\alpha_{2\mu}\}$ einzuführen. Diese Wahl bedeutet, daß sich die Forderung nach Rotationsinvarianz des Potentials in (1) besonders einfach berücksichtigen läßt:

$$\begin{aligned}
 V(\alpha_2) = & C_2 \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} + C_3 \left[\left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[0]} \\
 & + \sum_L C_{4L} \left[\left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[L]} \times \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \right]^{[L]} \right]^{[0]} + \dots \dots \dots \quad (4) \\
 \alpha^{[2]} \equiv & \left\{ \alpha_{2\mu} \right\}
 \end{aligned}$$

Die funktionale Abhängigkeit der potentiellen Energie von den Deformationsparametern ist also eindeutig festgelegt. Damit enthalten die Koeffizienten $C_2, C_3, C_{4L} \dots \dots \dots$ alle Aussagen über den Kern.

Um diese Koeffizienten zu bestimmen, gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten:

1.) Man kann versuchen, die Eigenzustände des Hamiltonoperators (1) in Abhängigkeit von diesen Koeffizienten zu bestimmen. Durch Vergleich mit dem experimentellen Niederenergiespektrum lassen sich dann ihre Werte fixieren. Der Nachteil dieser Methode liegt darin, daß die Lösung der obigen Schrödingergleichung recht aufwendig ist. Der Vorteil der Potentialenergiefläche, Gestaltseigenschaften der Kerne unmittelbar ablesen zu können, wird also teuer erkaufte. Zudem läßt sich keinerlei Zusammenhang dieser Koeffizienten mit anderen Kerneigenschaften wie z.B. Einteilchenanregungen angeben. Die Verbindung zwischen den kollektiven Anregungen der Atomkerne und ihren Einteilchenfreiheitsgraden geht also verloren.

2.) Der zweite Weg, der unmittelbar aus dem Schalenmodell der Atomkerne hervorgeht, vermeidet diese Nachteile. Er gestattet es, $V(\alpha_1)$ direkt zu berechnen. Zugleich kann durch Einsetzen der so gewonnenen potentiellen Energie die Konsistenz von Schalenmodell und Kollektivmodell unmittelbar an den Eigenwerten von (1) überprüft werden. Damit ist ein Mittel gegeben, die Struktur der Kollektivzustände in Termen des Schalenmodells direkt ohne großen numerischen Aufwand erklären zu können und die Systematik dieser Zustände über ganze Massenzahlbereiche zu verfolgen.

IIIa Mikroskopische Bestimmung von $V(\alpha_2)$

Um $V(\alpha_2)$ auch für Kerne mit einer statischen Grundzustandsdeformation unmittelbar aus dem Schalenmodell heraus bestimmen zu können, wird $V(\alpha_2)$ aus dem Laborsystem in ein kernfestes Koordinatensystem transformiert, in dem der Trägheitstensor diagonal ist. Dann gilt, da $V(\alpha_2)$ ein Skalar ist:

$$V(\hat{\alpha}_2) \longrightarrow V(\hat{a}_2)$$

mit: $\hat{a}_2 \equiv \{a_\mu\}$; $a_1 = a_{-1} = 0$; $a_2 = a_{-2}$

Die Potentialenergiefläche hängt also im kernfesten Koordinatensystem nur noch von zwei Deformationsparametern ab:

$$E(\hat{a}_2) = V(a_0, a_2)$$

und läßt sich deshalb wesentlich anschaulicher diskutieren. Da sich die Kopplungsmöglichkeiten jeder beliebigen Anzahl von sphärischen Tensoren $\alpha^{[2]}$ auf die grundlegenden Kopplungen

$$[\alpha^{[2]} \times a^{[2]}]^{[0]} \quad \left[[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times a^{[2]} \right]^{[0]}$$

zurückführen lassen,³⁾ lautet $V(\hat{a}_2)$ im kernfesten System

$$V(\hat{a}_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C'_{mn} \left([\alpha^{[2]} \times a^{[2]}]^{[0]} \right)^n \left(\left[[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times a^{[2]} \right]^{[0]} \right)^m \quad (5)$$

Ausgeschrieben in den Komponenten lautet dieser Ausdruck:

$$V(a_0, a_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} (a_0 + 2a_2^2)^n a_0^m (6a_2^2 - a_0^2)^m \quad (6)$$

Dieser Ausdruck stellt also keine einfache Potenzreihenentwicklung um die sphärische Lage $\alpha_0 = a_1 = 0$ dar.

Lediglich für den Fall der Axialsymmetrie des Kernes geht V über in:

$$V(\alpha_0, \alpha_2=0) = \sum_{m,n} (-)^m \cdot C_{mn} \cdot \alpha_0^{2n+3m} \quad (7)$$

also in eine Entwicklung nach Potenzen von α_0 .

Um die Fläche $V(\alpha_0, \alpha_2)$ nun mikroskopisch berechnen zu können, wird die Born - Oppenheimer Näherung der Molekülphysik auf die Kernphysik übertragen, d.h. die Kopplung zwischen Einteilchenbewegung und Kollektivbewegung wird vernachlässigt, so daß die Kollektivkoordinaten α_0 und α_2 lediglich als Parameter in die Wellenfunktionen und Energien des Schalenmodells eingehen. Diese Annahme ist gerechtfertigt, solange die Anregungswahrscheinlichkeit von einzelnen Nukleonen klein ist gegenüber der der Kollektivbewegungen. Ist dies der Fall (die Gültigkeit dieser Näherung wird später noch diskutiert werden), so kann $V(\alpha_0, \alpha_2)$ auf der Basis eines Schalenmodelles berechnet werden.

III b Schalenmodellansatz zur Berechnung von $V(\alpha_0, \alpha_2)$

Um die Koeffizienten C_{mn} und damit die Fläche $V(\alpha_0, \alpha_2)$ eindeutig bestimmen zu können, muß die Energie des Kernes als Funktion seiner Deformation nun auf der Basis eines mikroskopischen Kernmodells bestimmt werden. Sind die Einteilchenenergien dieses Modells bekannt, so können diese Zustände unter Beachtung des Pauliprinzip in der Reihenfolge ansteigender Energie mit den Nukleonen des Kernes für jede Deformation besetzt werden. Die gesamte Energie des Kernes kann dann leicht berechnet werden.

Als Einteilchen- Schalenmodell wird das von Nilsson²⁸⁾ entwickelte und von Newton auf Nichtaxialsymmetrie erweiterte deformierte Oszillatorpotential in seiner neueren Fassung verwendet.

$$H_{sp} = T + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + (\vec{\ell} \vec{s} + \mathcal{D}(\vec{\ell}^2 - \langle \vec{\ell}^2 \rangle)) \quad (8)$$

Die Diagonalisierung dieses Hamiltonoperators in der Basis des zweidimensionalen anisotropen Oszillators wird im Anhang I im Detail beschrieben. Sie liefert die Einteilchenenergien ε_i , die abhängen von den Deformationsparametern ω_x/ω_z und ω_y/ω_z . Die Abhängigkeit der Gesamtenergie des Kernes von diesen Größen wird dann gegeben durch:

$$E\left(\frac{\omega_x}{\omega_z}, \frac{\omega_y}{\omega_z}\right) = \sum_{i=1}^A \varepsilon_i\left(\frac{\omega_x}{\omega_z}, \frac{\omega_y}{\omega_z}\right) \quad (9)$$

wenn man berücksichtigt, daß bei Kollektivanregungen der Kerne der Hartree - Fock Zusammenhang zwischen der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und dem gemeinsamen Potential gestört ist und das Einteilchenpotential im Hamiltonoperator (8) als äußeres Feld aufzufassen ist.⁴⁾ Ferner ist für die Kollektivanregungen nicht der absolute Wert der Gesamtenergie, sondern ausschließlich deren Abhängigkeit von der Deformation entscheidend. Damit ist die einfache Summation in (9) gerechtfertigt.⁵⁾

Der Zusammenhang zwischen den Deformationsparametern des Nilsson-Modells und den Oberflächenvariablen (α_0, α_2) kann nun gefunden werden über die Selbstkonsistenzforderung, daß Potential- und Massenverteilung übereinstimmen. Jedoch tritt an diesem Punkt eine Schwierigkeit in der Betrachtung auf: Die Äquipotentialflächen des Einteilchenpotentials im Hamiltonoperator (8) stellen Ellipsoide dar, während die Radiusentwicklung (3) für große Deformationsparameter auch Einschnürungen der Kernoberfläche beschreibt. Mit der Wahl des Potentials in (8) ist also eine wesentliche Einschränkung des untersuchten Problems verbunden, denn es ist nun i.A. nicht mehr möglich, den Spaltprozeß vollständig zu beschreiben. Jedoch sind alle Phänomene des Grundzustandes und der kollektiven Vibrationen voll erfaßt, so daß im Folgenden die Theorie auf das kollektive Verhalten der Kerne in der Nähe des Grundzustandes angewandt wird. Es ist wichtig zu betonen, daß diese Einschränkung keine prinzipielle ist, sondern lediglich gemacht wird, um die Bestimmung der Einteilchenenergien möglichst einfach zu gestalten. Die Forderung nach Gleichförmigkeit der Äquipotentialflächen und der Massenverteilung liefert dann:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\omega_0}{1 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\alpha_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\alpha_2} \\ \omega_y &= \frac{\omega_0}{1 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\alpha_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\alpha_2} \\ \omega_z &= \frac{\omega_0}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\alpha_0} \end{aligned} \quad (10)$$

mit der Nebenbedingung der Volumenerhaltung für die Äquipotentialflächen:

$$\omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_z = \overset{0}{\omega}_0^3 = \text{const.} \quad (11)$$

Dabei ist angesetzt, daß die Halbachsen der Ellipsoide, die die Äquipotentialflächen darstellen, die gleiche funktionale Abhängigkeit von α_0 und α_2 besitzen wie der Kernradius (3) in diesen Richtungen. Da die Kernmaterie weitgehend inkompressibel ist, muß das Kernvolumen bei Deformation konstant bleiben. Diese Bedingung ist wegen der Gleichförmigkeit der Verteilungen in (11) an den Äquipotentialflächen berücksichtigt. Die Größe ω_0 wird dadurch eine Funktion von α_0 und α_2 .

Damit sind die Deformationsparameter des Schalenmodells und der Potentialenergiefläche miteinander korreliert und diese kann unmittelbar der Gesamtenergie des Kernes gleichgesetzt werden:

$$E(\alpha_0, \alpha_2) = \sum_{i=1}^A \varepsilon_i(\alpha_0, \alpha_2) = V(\alpha_0, \alpha_2) \quad (12)$$

wenn man den obigen Adiabasiabetrachtungen folgt.

III c Symmetrien der Potentialenergiefläche

Die Transformation der potentiellen Energie des Kernes $V(\alpha_{2\mu})$ im Laborsystem in $V(\alpha_0, \alpha_2)$ im kernfesten System ist nicht umkehrbar eindeutig. Vierundzwanzig verschiedene Sätze der Größen α_0 und α_2 und der Eulerwinkel ϵ, φ, ψ entsprechen ein und demselben Satz $\alpha_{2\mu}$. Dies hat zur Folge, daß jede in den $\alpha_{2\mu}$ eindeutige Funktion, die man der Bedingung $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,-1} = 0$ unterwirft, automatisch invariant ist gegenüber allen Transformationen der vierundzwanzig verschiedenen Parametersätze ineinander. Funktionen wie die Potentialenergiefläche $V(\alpha_0, \alpha_2)$, die nicht von den Eulerwinkeln abhängen, sind dann nur invariant gegenüber den sechs Transformationen, die die Größen α_0 und α_2 ändern:⁶⁾

$$T_2, T_2^2; T_1 T_2; T_1 T_2^2; T_1 T_2^3; T_2^3$$

mit:

$$T_1(a_0, a_2) = (a_0, -a_2)$$

$$T_2(a_0, a_2) = \left(-\frac{1}{2}a_0 + \sqrt{\frac{3}{2}}a_2, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a_0 - \frac{1}{2}a_2\right)$$

$$T_1^2 = 1, \quad T_2^3 = 1$$

Nach dem oben Gesagten erfüllt $V(a_0, a_2)$ in (6) trivialerweise diese Invarianzen. Um die Konsistenz der Gleichung (12) zu prüfen, genügt es, zu zeigen, daß auch $\varepsilon_i(a_0, a_2)$ invariant gegenüber diesen Transformationen ist. Ihre Anwendung auf das Einteilchenpotential in (8) liefert:

$$T_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_y, \omega_z, \omega_x); \quad T_2^2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_z, \omega_x, \omega_y)$$

$$T_1 T_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_z, \omega_y, \omega_x); \quad T_1 T_2^2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_x, \omega_z, \omega_y)$$

$$T_1 T_2^3(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_y, \omega_x, \omega_z); \quad T_2^3(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Die Wirkung dieser Transformationen auf das Einteilchenpotential besteht also in einer Vertauschung der Frequenzen untereinander. Da die Eigenwerte eines quantenmechanischen Systems von der Lage des Koordinatensystems unabhängig sein müssen, bleibt also $\varepsilon_i(a_0, a_2)$ invariant. Die mikroskopisch berechnete Potentialenergiefläche genügt also denselben Invarianzen wie die phänomenologisch angesetzte.

III d. Behandlung der Coulombenergie

Mit den oben entwickelten Methoden sollen die Eigenschaften schwerer Kerne untersucht werden. Das Einsetzen der spontanen Spaltung im Bereich der Aktiniden zeigt deutlich, daß die Coulombenergie einen starken Einfluß auf die Gestalt der Potentialenergiefläche $V(\alpha_0, \alpha_2)$ besitzt. In Störungstheorie erster Ordnung ergibt sich für den Beitrag der Coulombwechselwirkung zur Gesamtenergie des Kerns:

$$E_c = \sum_{i,j=1}^Z \iint \psi_i^* \psi_j^* \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \{ \psi_i(1) \psi_j(2) - \psi_i(2) \psi_j(1) \} d\tau_1 d\tau_2 \quad (13)$$

Da eine exakte Auswertung dieses Ausdrucks erst seit kurzer Zeit bearbeitet wird,⁷⁾ müssen frühere halbqualitative Ergebnisse zur Auswertung von E_c herangezogen werden. Diese Berechnungen im Rahmen des Thomas-Fermi-Modells haben gezeigt, daß der Einfluß des Austauschterms mit $Z^{4/3}$ verläuft, während der direkte Term mit Z^2 ansteigt⁸⁾. Daher ist in schwereren Kernen der Einfluß des Austauschterms vernachlässigbar. Da die Coulombwechselwirkung langreichweitig ist, bedeutet die Berechnung des direkten Anteils in (13) eine Mittelung des Wechselwirkungspotentials über den gesamten Kern. Da außerdem die Ergebnisse der Elektronenstreuung zeigen, daß die Vorstellung einer homogenen Ladungsverteilung im Kern mit einem recht scharfen Abfall am Rande gerechtfertigt ist, kann E_c durch die Coulombenergie eines gleichförmig geladenen Volumens gut angenähert werden.

$$E_c = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(1) \cdot \rho(2)}{|\tau_1 - \tau_2|} d\tau_1 d\tau_2 + \text{corr.} \quad (14)$$

Die Korrekturterme enthalten die Differenz

$$\Delta \rho = \rho - \sum_{i=1}^Z \psi_i^* \psi_i \quad (15)$$

sie geben also den Einfluß der Schalenstruktur wieder. Da die Zustandsdichte des Nilssonmodells sich mit wachsender Deformation α_0 einer gleichförmigen annähert, werden die

einen Beitrag zu E_c liefern.

Im Nilssonmodell wird die Coulombwechselwirkung lediglich durch unterschiedliche Wahl der Parameter C und D für Neutronen und Protonen berücksichtigt, also:

$$E_c^N = \sum_{i=1}^Z \left\{ (C_p - C_n) \langle i | \vec{r}^2 | i \rangle + (D_p - D_n) \cdot \langle i | \vec{r}^2 - \langle \vec{r}^2 \rangle | i \rangle \right\} \quad (16)$$

Der Einfluß von E_c auf die Gesamtenergie des Kernes nimmt mit wachsendem α stark ab, da bei großen Deformationen das Potential (8) praktisch vollständig durch den anisotropen Oszillator bestimmt ist. Dieses Verhalten legt es nahe, E_c^N als Schalenkorrektur zur Coulombenergie eines gleichförmig geladenen Körpers anzusehen und diesen Term mit den Korrekturgliedern in (14) zu identifizieren. Dann gilt:

$$E_c = E_c^0 + E_c^N$$

und

$$V(a_0, a_2) = \sum_{i=1}^A \varepsilon_i(a_0, a_2) + E_c^0(a_0, a_2) \quad (17)$$

da E_c^N in den Nilsson - Energien ε_i enthalten ist.

III e. Berücksichtigung der Restwechselwirkung bei der Berechnung von V

Da im gemeinsamen Feld des Nilssonpotentials nur die Quadrupolkomponente der Nukleonenwechselwirkung berücksichtigt ist, andererseits aber das Fehlen tiefliegender Teilchenanregungen im Spektrum schwerer g-g Kerne deutlich daraufhinweist, daß die kurzreichweitigen Anteile dieser Wechselwirkungen einen starken Einfluß auf die Nukleonenkorrelation besitzen, ist es nötig, zur Erklärung kollektiver Kerneigenschaften zur Berechnung von V eine Restwechselwirkung zu berücksichtigen. Die Erfolge des Paarkraftformalismus bei der Berechnung von Energielücken,

Trägheitsmomenten und μ g - Massendifferenzen haben gezeigt, ⁹⁾ daß diese Kraft den wesentlichen Anteil dieser Wechselwirkung enthält. Zugleich hat diese Methode den Vorteil, daß sie numerisch leicht zu behandeln ist. Die Grundzustandsenergie ergibt sich in der BCS - Theorie als:

$$E_0 = 2 \sum_i \varepsilon_i v_i^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (18)$$

mit:

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right)$$

als Besetzungswahrscheinlichkeit. Dabei ist angenommen, daß die diagonale Paarenergie in den ε_i enthalten ist. Die Energielücke Δ und das chemische Potential λ lassen sich aus den Bedingungen der mittleren Teilchenzahlerhaltung:

$$\langle n \rangle = N = 2 \sum_i v_i^2 \quad (19)$$

und der Minimalisierung der Grundzustandsenergie:

$$\frac{2}{G} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \quad (20)$$

bestimmen (s. Anh. II).

III f. Axialsymmetrische Kerngestalten

Für den Fall axialsymmetrischer Prozesse, wie z.B. die β -Vibrationen kann $E_i(\alpha_c^{(i)}, l)$ ohne großen rechnerischen Aufwand an Punkten $\alpha_c^{(i)}$ berechnet werden. Durch Anpassung des Polynoms (7) an die mikroskopisch berechneten Punkte E_i können die Koeffizienten C_{mn} dann bestimmt werden, allerdings mit einer Einschränkung: Für Terme, für die keine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Exponenten $2n+3m$ und dem Zahlenpaar (m,n) besteht, kann nur die Summe

$$\sum_{i,k} (-)^i C_{i,k} = S \quad (21)$$

festgelegt werden. Solange man nur Größen untersucht, die von α_1 unabhängig sind, wie z.B. die β -Vibrationen, ist diese Information völlig ausreichend. Für die vollständige Behandlung aller Kerneigenschaften dagegen wird eine zusätzliche Information über die Fläche $V(\alpha_0, \alpha_1)$ benötigt, die es gestattet, die Koeffizienten in (21) ebenfalls eindeutig zu bestimmen. Dieser Punkt wird im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

Die auf die dargelegte Weise berechnete Potentialkurve $V(\alpha_0, 0)$ kann nun an experimentellen Größen geprüft werden, die direkt mit der Kerngestalt verknüpft sind: an der Grundzustandsdeformation β_0 , der β -Vibrationsenergie E_β und dem Zentrifugalfaktor B_{zr} der Rotationsvibrationswechselwirkung in den Energien der Grundzustandsrotationsbande:

$$E(I) = A \cdot I(I+1) + B_{ze} I^2(I+1)^2 \quad (22)$$

Die Grundzustandsdeformation β_0 ist direkt angebbare als Minimumpunkt von $V(\alpha_0, 0)$, solange das Minimum der Potentialenergiefläche tatsächlich für eine axialsymmetrische Gestalt auftritt. Diese Bedingung ist außer für einige Kerne am Ende der Region der Seltenen Erden erfüllt, wie später diskutiert werden wird. Für die Bestimmung der anderen Größen wird die Potentialenergiekurve um ihr Minimum entwickelt:

$$V(\alpha_0, 0) = \sum_{n=2}^m \frac{1}{n!} (\alpha_0 - \beta_0)^n \cdot \left. \frac{\partial^n V}{\partial \alpha_0^n} \right|_{\beta_0} \quad (23)$$

Die Größe

$$C_0 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_0^2} \right|_{\beta_0} \quad (24)$$

bestimmt dann die Steifheit des Kernes gegenüber α_0 -Oszillationen und gibt direkt die entsprechende Potentialkonstante im Rot-Vib-Modell an. Beschränkt man sich in der kinetischen Energie in (1) auf Terme 2. Ordnung in

$$\dot{\alpha} : T = \frac{\sqrt{5}}{2} B \cdot \left[\dot{\alpha}^{[2]} \times \dot{\alpha}^{[2]} \right]^{[0]} \quad (25)$$

so kann H in (1) analytisch diagonalisiert werden mit dem Eigenwert:

$$E_{\beta}^{(0)} = \hbar \sqrt{\frac{C_0}{B}} \quad (26)$$

Gleichzeitig führt die Beschränkung von T notwendigerweise auf die Beziehung

$$B = J_c / (3\beta_c^2) \quad (27)$$

für den Massenparameter B . B kann deshalb für Rotationskerne direkt dem Experiment entnommen werden, wenn β_c vorher an der Fläche bestimmt wurde. Um auch in Übergangsbereichen von sphärischen zu permanent deformierten Kernen den ersten angeregten Vibrationszustand energetisch berechnen zu können, wird das empirische Faktum benutzt, daß für $12 \leq A \leq 240$ 80% aller γ -Übergangswahrscheinlichkeiten vom ersten angeregten 2^+ Niveau zum Grundzustand durch das Gesetz:

$$T_{\gamma}(2^+ \rightarrow 0^+) = (3 \pm 1) \cdot 10^{10} \cdot E_{\gamma}^4 \cdot Z^2 \cdot A^{-1} \quad (28)$$

beschrieben werden¹⁰⁾. Kombiniert man dieses mit den entsprechenden Voraussagen des Rotations- bzw. Vibrationsmodells, so erhält man:

$$B/\hbar^2 = 10^{-3} \cdot A^{2/3} \text{ MeV}^{-1} \quad (29a)$$

für Rotationskerne und

$$B/\hbar^2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot A^{2/3} \text{ MeV}^{-1} \quad (29b)$$

für Vibrationskerne als nützliche Abschätzungen für den Massenparameter.

Wie später gezeigt wird, sind jedenfalls die benutzten Massenparameter vollkommen unkritisch für die Struktur der Kollektivzustände. Sie ist nahezu ausschließlich von der Gestalt der Potentialenergiefläche bestimmt.

Mit diesen Werten kann $E_{\beta}^{(c)}$ und mittels einer Störungsrechnung erster Ordnung, die die höheren Potenzen in der Entwicklung (23) berücksichtigt, E_{β} berechnet und mit dem Experiment verglichen werden. Für den Koeffizienten B_{ze} erhält man im Rot-Vib-Modell den Ausdruck

$$B_{ze} = -\varepsilon \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{E_{\beta}^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{E_{\beta}} \cdot \frac{\varepsilon}{E_{\beta} - 2\varepsilon} \right) \quad (30)$$

wo $3\varepsilon = E(2)$ die Energie des ersten angeregten Rotationszustandes ist ²⁾. Wenn der Kern steif ist gegenüber α_2 -Vibrationen ($E_{\beta} \rightarrow \infty$), so verwindet der 2. Term in (30).

III g Asymmetrische Kerngestalten

Um die obigen Betrachtungen auf asymmetrische Prozesse ausdehnen zu können, ist es im Prinzip ausreichend, den vollständigen Hamiltonoperator (8) für eine große Zahl von Punkten ($\alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}$) zu diagonalisieren. $V(\alpha_0, \alpha_1)$ ist dann an diesen Stützstellen numerisch bekannt. Aus dieser Kenntnis sind dann die Grundzustandsasymmetrie $\bar{\alpha}_1$, die Energie der α_1 -Vibrationen:

$$E_{\alpha_1} = \hbar \cdot \sqrt{\frac{C_2}{B}} \quad (31)$$

und der Beitrag der α_1 -Vibrationen zur Rot-Vib-Wechselwirkung bestimmbar. Diese Methode bietet theoretisch keinerlei Schwierigkeiten; sie ist aber verbunden mit der numerisch recht aufwendigen Diagonalisierung von (8) in der ganzen (α_0, α_1) Ebene.

Aus diesem Grunde wird eine andere, elegantere Methode zur Berechnung der von α_1 abhängigen Größen benutzt, die es gestattet, die vollständige Fläche $V(\alpha_0, \alpha_1)$ durch eindeutige Bestimmung aller C_{mn} analytisch in der Form (6)

anzugeben, ohne die Fläche an Stützstellen in der gesamten (a_0, a_1) Ebene berechnen zu müssen. Dazu wird davon Gebrauch gemacht, daß die 2 Potentialkurven $V(a_0, a_1) = \phi(a_1)$ und $V(a_0, a_1 = 0) = g(a_0)$ über die Koeffizienten C_{mn} stark miteinander gekoppelt sind. Diese beiden Potentialschnitte sind gegeben durch:

$$g(a_0) = \sum_{mn} (-)^m C_{mn} a_0^{2n+3m} \quad (32)$$

$$\phi(a_1) = \sum_{\lambda} b_{\lambda} a_1^{2\lambda} \quad (33)$$

mit

$$b_{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=\lambda}^{\infty} C_{i,k-i} \sum_{\substack{v=0 \\ v \leq k-i \\ v \geq \lambda-i}}^{\lambda} (-)^{i+v-\lambda} 2^v \cdot 6^{\lambda-v} \binom{k-i}{v} \times \quad (34) \\ \times \binom{i}{i+v-\lambda} \bar{a}_0^{2k+i-2\lambda}$$

mit:

$$i = m ; \quad k-i = n$$

Die Gleichungen (33) und (34) enthalten nun die Information, die in Abschnitt III f zur vollständigen Bestimmung aller C_{mn} noch fehlte. Deshalb ist es jetzt also lediglich noch nötig, an einem für alle Kerne gleichen Werte $\bar{a}_0$ die Kurve $V(\bar{a}_0, a_1) = \phi(a_1)$ mikroskopisch zu berechnen. Durch Anpassung der Koeffizienten b_{λ} an diese Kurve erhält man dann aus (34) zusammen mit (21) die Bestimmungsgleichungen für die bisher noch nicht eindeutig festgelegten Größen $C_{i,k}$ in (21). Damit ist die Potentialenergiefläche $V(a_0, a_1)$ in der Ebene mit kleinstem Aufwand bestimmt, indem von ihrer Rotationsinvarianz Gebrauch gemacht wurde.

IV Numerische Durchführung der Theorie.

a.) Einteilchenrechnungen

Der Schalenmodell-Hamiltonoperator (8) wurde diagonalisiert in der Basis des deformierten harmonischen Oszillators in Zylinderkoordinaten, die zu wesentlich einfacheren Matrixelementen als die üblicherweise benutzte sphärische Basis in Polarkoordinaten führt. (s. Anhang I). Als Schalenmodellparameter wurden die von Seeger¹¹⁾ gefundenen Werte benutzt:

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{2} \frac{C}{\hbar \omega_0} & \mu &= \frac{2D}{C} \\ \kappa_N &= \kappa_0 \left[\frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2} \right]^{-1/3} & \mu_N &= \mu = \text{const.} \end{aligned}$$

mit $\kappa_0 = 0.180$ und $\mu = 0.620$ für Protonen
und $\kappa_0 = 0.240$ und $\mu = 0.308$ für Neutronen

Im Gegensatz zu allen früheren vergleichbaren Rechnungen wurde keine weitere Anpassung von Einteilchenenergien vorgenommen. Für die Oszillatorenenergie $\hbar \omega_0$ wurde für Protonen und Neutronen derselbe Wert benutzt, um hier nicht zusätzlich einen weiteren Anteil der Coulombenergie implizit einzuführen. Die Analyse von Seeger hat gezeigt, daß

$$\hbar \omega_0 \approx 35.5 \cdot A^{-1/3} \text{ MeV}$$

für die Neutronenzustände an der Fermikante den empirischen mittleren quadratischen Radius gut wiedergibt¹¹⁾. Deshalb wurde dieser Wert auch in den vorliegenden Berechnungen benutzt.

Zur Berücksichtigung der Paarkraft wurde wie üblich angenommen, daß sie nicht zwischen Protonen und Neutronen wirkt, da diese in der Nähe der Fermikante infolge des Neutronenüberschusses unterschiedliche Oszillatorschalen besetzen. Daher geht die BCS-Grundzustandsfunktion über in ein Produkt aus der Protonen- und der Neutronengrundzu-

standsfunktion. Die Stärke der Paarkraft wurde so bestimmt, daß die empirischen Gaps am Minimum der Potentialenergiefläche richtig wiedergegeben werden:

$$G_p = \frac{29.0}{A} \text{ MeV} \qquad G_n = \frac{24.0}{A} \text{ MeV}$$

Diese Stärken wurden dann auch für alle anderen Deformationen benutzt. Neueste Experimente über Einteilchenanregungen am Sattelpunkt der Spaltung deuten zwar daraufhin, daß G eine Funktion der Oberfläche und damit deformationsabhängig sein könnte¹²⁾. Jedoch ist diese Annahme hier ohne kritischen Einfluß auf die Ergebnisse, da das kollektive Verhalten der Kerne in der Nähe des Grundzustandes untersucht wird.

Bei den Protonen wurden alle Einteilchenenergien der Oszillatorschalen bis $N = 8$ und für die Neutronen bis $N = 9$ berücksichtigt. Der Einfluß der Paarkraft wurde auf 24 Schalenmodellzustände beschränkt, von denen jeder entsprechend den möglichen Drehimpulsorientierungen zweifach besetzt ist. Die Zustände liegen symmetrisch zur Fermikante.

Wegen der Symmetrien der Potentialenergiefläche genügt es, die Fläche in dem Segment der a_0 - a_2 Ebene zu berechnen, das von den Strahlen $a_2=0, a_0 \geq 0$ und $a_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} a_0, a_0 \geq 0$ eingeschlossen ist. Deshalb wurden die folgenden Punkte mikroskopisch berechnet (s. Abb. 1b):

$$-0.4 \leq a_0 \leq +0.4, \quad a_2 = 0, \quad \Delta a_0 = 0.05$$

$$\bar{a}_0 = 0.28, \quad 0.0 \leq a_2 \leq 0.2, \quad \Delta a_2 = 0.02$$

da die Linie $a_2 = 0, a_0 \leq 0$ der Geraden $a_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} a_0, a_0 \geq 0$ äquivalent ist. An die Potentialkurve $V(a_0, 0)$ wurde dann gemäß (7) ein Polynom 7. Ordnung in a_0 ohne linearen Term (der die Rotationsinvarianz verletzen würde) angepaßt.

Die beiden Koeffizienten C_{20} und C_{63} wurden dann mit Hilfe der Kurve $V(0.2\gamma, \alpha_2)$ und der Nebenbedingung (21) bestimmt.

IV b Behandlung der Coulomb - Energie

Zur Berechnung der klassischen Coulombenergie in (14) wurde die Annahme einer homogenen Ladungsverteilung gemacht. Dann kann die Coulombenergie eines axialsymmetrischen Ellipsoides, dessen Halbachsenverhältnis mit dem der Äquipotentialflächen von (8) übereinstimmt, analytisch berechnet werden:¹³⁾

$$E_c(\gamma(a_0)) = E_c(0) \cdot (1 - \gamma)^{1/2} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \operatorname{arctanh} \sqrt{\gamma} & \gamma > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\gamma} & \gamma < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Dabei stellt $\gamma^{1/2}$ die numerische Exzentrizität der Ellipse dar und γ ist gegeben durch:

$$\gamma = 1 - \left(\frac{\omega_z(a_0)}{\omega_x(a_0, 0)} \right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi}} a_0 \cdot \frac{1 + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} a_0}{\left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} a_0 \right)^2} \quad (36)$$

$E_c(0)$ stellt die Coulombenergie der gleichförmig geladenen Kugel dar:

$$E_c(0) = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_0} = 0.72415 \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ MeV} \quad (37)$$

Um die Abhängigkeit von $E_c(a_0, \alpha_2)$ von α_2 zu bekommen, wird $E_c(\gamma(a_0))$ entwickelt bis zu Termen 4. Ordnung in α_0 :

$$E_c(a_0, 0) = E_c(0) \left[1 - \frac{1}{4\pi} a_0^2 + \frac{19}{1680} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{3/2} a_0^3 - \frac{39}{8960} \left(\frac{5}{\pi} \right)^2 a_0^4 + \dots \right] \quad (38)$$

Da $E_c(a_0, \alpha_2)$ als Teil der gesamten Potentialenergiefläche

ebenfalls die Gestalt (6) haben muß, ist $E_c(a_0, a_1)$ direkt angebar:

$$E_c(a_0, a_1) = E_c(0) \cdot \left[1 - \frac{1}{4\pi} (a_0^2 + 2a_1^2) - \frac{19}{1680} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \times \right. \\ \left. \times a_0 (6a_1^2 - a_0^2) - \frac{39}{8960} \left(\frac{5}{\pi} \right)^2 \cdot (a_0^2 + 2a_1^2)^2 + \dots \right] \quad (39)$$

Dieser Ausdruck wurde für die Coulombenergie in (17) benutzt.

V. Bedeutung der Restwechselwirkungen für die PES.

V a. Einfluß der Coulomb - Energie auf die PES.

Die Coulomb - Energie neigt dazu, den Atomkern zu deformieren, der seine minimale Energie bei der Deformation annimmt, bei der die deformierende Coulombkraft mit der Einzelteilchen-Steifheit des Kernes im Gleichgewicht steht. Daher hat die Coulomb-Energie 2 Effekte: Erstens vergrößert sie die Grundzustandsdeformation β_0 (s. Abb. 8) und zweitens vergrößert sie die Deformationsenergie (s. Abb. 2)

$$E_{def} = E(a_0=0, a_1=0) - E(\beta_0, \bar{a}_1) \quad (40)$$

E_c vergrößert β_0 für Kerne, die in der Mitte zwischen Schalenabschlüssen liegen, um ca 15 - 20%, während sie die Deformationsenergie um ca 80% anhebt. Dieses Verhalten wird anschaulich in Abb. 3 gezeigt: Wenn der Kern eine sphärische Grundzustandsgestalt besitzt, wird er durch die Coulomb-Kraft wesentlich weicher für Vibrationen. In den Übergangsbereichen von sphärischen zu permanent deformierten Kernen wird daher die Coulombkraft entscheidend für das Auftreten einer statischen Grundzustandsgestalt. Dieses Verhalten ist quantitativ in den Steifheiten C_0 zu sehen (s. Abb. 4). Während für die Kerne mit kleinem A diese

Krümmungen relativ stark durch die Coulomb-Wechselwirkung beeinflusst werden, werden die C_0 - Werte der stark deformierten Kerne nur vergleichsweise wenig berührt. Außer diesen diskutierten Effekten hat die Coulomb-Energie eine weitere wichtige Eigenschaft. Sie kann die Gestalt des Kernes entscheidend bestimmen. Dies kann von (38) und (39) gesehen werden. (38) begünstigt offensichtlich die oblate Gestalt ($\alpha_0 < 0$) gegenüber der prolata ($\alpha_0 > 0$) mit demselben $|\alpha_0|$ um den doppelten Betrag des Terms dritter Ordnung. Weil (39) nun auch $\alpha_1 \neq 0$ energetisch gegenüber der Axialsymmetrie begünstigt, kann die Coulomb-Energie wichtig werden für die Bestimmung der α_2 - Krümmungen

$$C_2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2^2} \right|_{\min} \quad (41)$$

die durch ihren Einfluß verkleinert werden (s. Abb. 7), und für das Problem der Axialsymmetrie, besonders in den Übergangsbereichen, wo die Kerne sehr weich gegen α_2 -Deformationen sind.

Zusammenfassend kann man sagen, daß das α_2 -Verhalten der Kerne durch die Coulomb-Kraft wesentlich stärker als die α_0 -abhängigen Größen beeinflusst wird.

V b. Einfluß der Paar-Wechselwirkung auf die PES

Die Paarkraft begünstigt energetisch die sphärische Gestalt wegen der großen Zustandsdichte bei der Deformation $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$. Dies kann quantitativ in der Abb. 5 gesehen werden. Für den stark deformierten Kern D_{16}^{16} erniedrigt die Paarwechselwirkung die Energie des Kernes bei $\alpha_0 = 0$ um ca 11 MeV, während ihr Einfluß bei $\alpha_0 = 0.5$ auf ca. 2 MeV abgefallen ist. Dies führt zu einer großen Erniedrigung der De-

formationsenergie um ca 9 MeV, während die Grundzustandsdeformation viel weniger berührt wird. Daraus wird der Einfluß der Paarkraft auf die Krümmungen C_0 unmittelbar klar (s. Abb 6); sie werden durch die Berücksichtigung dieser Wechselwirkung um mehr als einen Faktor zwei verkleinert in deformierten Kernen. In sphärischen Kernen dagegen, steigt C_0 um ca. 80% an, während in allen Kernen die qualitative Abhängigkeit von der Massenzahl die gleiche bleibt. Das Verhalten von C_2 ist vollständig analog und so gelangt man zu der folgenden wichtigen Feststellung: Während die Schalenmodellkonfigurationen in einem Kern das qualitative Verhalten der Kernsteifheiten bestimmen, ist die Paarkraft äußerst wichtig für die Größe dieser Werte und daher für die Energie der kollektiven Anregungen.

V c. Vergleich der berechneten PES mit dem Experiment.

Struktur der Kollektiven Anregungen in den Seltenen Erden.

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der PES geprüft mit Hilfe experimenteller Daten, die direkt mit den Gleichungen (19) und ihrem Analogon für die α_2 -Schwingungen

$$E_{\alpha_2} = \hbar \sqrt{\frac{C_2}{B}} \quad (42)$$

mit dem B_{2e} Faktor in Gleichung (22) und der experimentellen Grundzustandsdeformation¹⁴⁾ verglichen werden können. Vor diesem Vergleich muß aber noch ein wesentlicher Punkt erwähnt werden: Da hier nicht das vollständige dynamische Problem der Diagonalisierung des kollektiven Hamiltonoperators (1) behandelt werden soll, muß für die Deformation eine statische Näherung gemacht werden, die über die Gleichung (27) auch in alle anderen Berechnungen experimentell beobachtbarer Größen eingeht. Der experimentelle Wert der Deformation wird üblicherweise den reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten für elektrische Quadrupol-Übergänge entnommen:

$$B(E2, 2+ \rightarrow 0+) \sim \langle 0 | a^2 | 0 \rangle$$

Dieser Wert bestimmt jedoch nicht, ob der Kern deformiert oder sphärisch ist, denn es gilt:

$$\langle 0 | a_0^2 | 0 \rangle = \beta_0^2 + \langle 0 | (a_0 - \beta_0)^2 | 0 \rangle \quad (43)$$

Daraus folgt sofort, daß die statische Näherung nur im Falle des Verschwindens des 2. Terms in (43) gültig ist, d.h. im Falle stark deformierter Kerne. Dieses Verhalten zeigt sich deutlich in Abb. 8. In dem Gebiet sphärischer Kerne und in den Übergangsbereichen sind die gemessenen Werte nahezu ausschließlich durch den 2. Term in (43) bestimmt, während sein Beitrag in den deformierten Regionen auf ca. 5% abgesunken ist. In dieser Abbildung ist außerdem der Einfluß der Coulomb-Kraft gezeigt, der offensichtlich nötig ist, um die richtige Größe der Deformationen zu erklären, die ohne deren Einfluß um ca. 20% zu klein werden.

Der steile Anstieg der Deformationen am Beginn des Bereichs der Seltenen Erden wird gut von der Theorie reproduziert. Dieses Verhalten kann mit Eigenschaften des Schalenmodells erklärt werden: Magische Konfigurationen führen zu einer starken energetischen Bevorzugung für einen sphärischen Grundzustand. Wenn eine neue Schale aufgefüllt wird, so steigt die Deformation und der mit ihr verbundene Energiegewinn an, bis die Schale halb gefüllt ist. Ein Auffüllen weiterer Nukleonen führt zu einem Abfall beider Größen. Die Struktur der kollektiven Zustände in den Seltenen Erden ist nun wesentlich durch die Tatsache bestimmt, daß die Region beginnt, wenn nur die Neutronenzahl magisch ist ($N=82$) und die Protonen schon ein drittel ihrer Schale füllen, während der Bereich mit dem doppelt magischen Kern Pb^{208} ($N=126$, $Z=82$) endet. Daher ist für die Kerne am Beginn dieser Region die sphärische Grundzustands-gestalt nicht stark bevorzugt. Die Deformationen steigen deshalb sehr plötzlich an, wenn weitere Neutronen aufgefüllt wer-

den, während die Deformationsenergien noch relativ klein bleiben wegen des Neutronenschalenabschlusses, z.B. hat der Kern Nd^{150} zwar $\beta_c = 0.23$, aber nur ca. 0,7 MeV Deformationsenergie, die somit kleiner ist als die Nullpunktsenergie seiner Vibrationen. In Abb. 2 kann man außerdem sehen, daß die Anlagerung weiterer Neutronen einen wesentlich größeren Energiegewinn für $A \leq 166$ liefert als die von Protonen, deren Schale in Dy bereits halb gefüllt ist. Diese Tatsache führt nun dazu, daß die Deformationsenergien in diesem Bereich steil mit N in einer Isotopenkette ansteigen, während sie in einer Isobaren-Familie abfallen mit Z. Durch dieses Verhalten wird die Struktur der kollektiven Anregungen bestimmt, denn es findet sich wieder in den Krümmungen C_0 (s. Abb. 9). Für die C_2 -Werte wird dieser Effekt allerdings stark durch die Coulomb-Energie abgeschwächt, die die Kerne mit niedrigem Z in jeder Isobarenkette begünstigt (vergl. Abb. 7a und 7b). Abb. 9 erklärt außerdem die schon früher beobachtete experimentelle Tatsache¹⁵⁾, daß die β -Vibrationsenergien besonders niedrig sind und die Rotations-Vibrations-Wechselwirkung in der Grundzustands-Rotationsbande besonders groß ist für die neutronenärmeren Isotope.

Weiterhin erhält man von den C_0 -Werten das wichtige Ergebnis, daß die Energie der kollektiven β -Vibrationen für die Kerne mit $150 \leq A \leq 166$ nahezu ausschließlich von der Neutronenkonfiguration bestimmt ist und mit N ansteigt. Dieses Verhalten zeigt sich in den Experimenten in der zackigen Struktur der E_β -Werte für $150 \leq A \leq 160$ (s. Abb 10.) Gleichzeitig wird dadurch offenbar, daß die Struktur dieser Anregungen hauptsächlich von der PES bestimmt wird. Damit ist die Methode, den Massenparameter B vom Experiment zu nehmen, gerechtfertigt.

In Abb. 10 und 11 sind die Vibrationsenergien für Kerne im Massenzahlbereich $144 \leq A \leq 194$ mit dem Experiment verglichen.

Für die β -Vibrationen und die ersten angeregten 2^+ Zustände in den Vibrationskernen ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sowohl in der Größe als auch im Trend der Werte gut. Im Bereich $A \approx 170$ liegen sie um ca. 150 KeV zu hoch. Für die γ -Vibrationen wird nur die ungefähre Größe richtig reproduziert. Dafür gibt es zwei Gründe: Der erste liegt in der statischen Approximation für β_0 . Diese Näherung fällt besonders in den Übergangsbereichen ins Gewicht und zwar dort hauptsächlich für die γ -Vibrationen, die nicht einfache α_1 -Schwingungen sind, sondern für die die Kopplung zwischen α_1 und α_2 wesentlich ist für eine korrekte Beschreibung (s. Abb. 13 und 14). Damit sind die Abweichungen in den Sm, Gd und W Isotopen erklärt. Der zweite Grund für die Diskrepanzen ist mehr prinzipieller Natur. In den Kernen mit $A \approx 170$ erreichen die empirischen Energielücken im Anregungsspektrum der qq -Kerne ihr Minimum und deshalb treten dort die kollektiven Anregungen etwa bei den gleichen Energien wie die Einzelteilchenzustände auf. Daher ist hier die grundlegende Annahme der vorliegenden Arbeit, die Adiabaticität zwischen kollektiven und Einteilchen-Anregungen, die zur Gleichung (12) führt, nicht mehr gültig. Diese Erklärung wird stark unterstützt durch experimentelle Befunde. Der starke Anstieg der γ -Energien in den Yb -Isotopen und der gleichzeitige Abfall der $B(E2)$ -Werte (z.B. für Yb^{176} : $B(E2, 2^+_{\gamma} \rightarrow 0^+_{\gamma}) \approx 1.5 \text{ fm}^4$) machen den kollektiven Charakter dieser Zustände zweifelhaft ¹⁶⁾. In Hf^{174} weiterhin sind zwei 0^+ Banden gemessen worden ¹⁷⁾, von denen lediglich die obere in die theoretische Systematik hineinpaßt, während die 0^+ Bande in Yb^{172} keinen kollektiven Charakter besitzt. ¹⁶⁾ In einigen weiteren Kernen in diesem Massenzahlbereich sind zudem mehrere 0^+ Zustände gefunden worden im Energiebereich von ca. 1 MeV, die in Fig. 10 durch einen Stern gekennzeichnet sind. Diese Tatsachen zeigen, daß in diesen Kernen die Wechselwirkung zwischen kollektiven und Teilchen-Freiheitsgraden sehr stark ist, so daß die Kollektivität über viele Zustände verteilt ist.

Da infolge dieser Gründe insbesondere die γ -Vibrationen nicht besonders gut beschrieben werden, wird in Abb. 12 nur derjenige Teil der B_{2e} -Werte mit dem Experiment¹⁸⁾ verglichen, der von den β -Vibrationen berührt. Diese Näherung ist vernünftig, da unter der Annahme $E_\beta \approx E_\gamma$ die γ -Vibrationen nur ca. 1/3 des totalen Wertes beitragen (s. (30)). Der Beitrag dieser Vibrationen würde jedenfalls die theoretischen Werte besonders in den Übergangsbereichen vergrößern und dort die Übereinstimmung mit dem Experiment noch weiter verbessern.

Es ist gut bekannt, daß die Rumpf-Polarisation einen wesentlichen Einfluß auf die Kerngestalt besitzt. Während die abgeschlossenen Oszillatorschalen energetisch die prolate Gestalt begünstigen, bevorzugen die äußeren Teilchen in der ersten Hälfte der Schale die prolate und in der 2. Hälfte die oblate Gestalt^{19.)} Da die Coulomb-Energie ebenfalls die oblate Gestalt begünstigt, erwartet man am Ende jeder Schale oblate Kerngestalten, da sich hier beide Effekte kohärent aufaddieren. Dieses Verhalten zeigt sich deutlich in Abb. 13 und 14, die die Unterschiede der PES am Beginn und am Ende der Region aufzeigen. Aus diesen Ergebnissen folgt, daß der Kern Os^{188} mit einer Deformationsenergie von 1.2 MeV eine relativ stabile asymmetrische Gestalt haben sollte. Allerdings liegt auch die Nullpunktsenergie $E_\gamma + \frac{1}{2} E_\beta$ in dieser Größenordnung. Dadurch wird zumindest eine sehr weiche α_1 -Vibration und ein nahezu α_1 instabiles Verhalten dieses Kernes nahegelegt, das tatsächlich in den Os-Isotopen experimentell bestätigt wird. Die PES dieser Kerne machen es jedenfalls offensichtlich, daß ihr kollektives Verhalten nur durch eine vollständige Diagonalisierung des Hamiltonoperators (1) korrekt beschrieben werden kann, die die vollständige Dynamik des Kernes enthält.²⁰⁾

VI. Vergleich mit Berechnungen der PES im Paar- + Quadrupol-Kraft Modell

Kürzlich sind Berechnungen der PES im Paar- + Quadrupol-Kraft-Modell von Baranger und Kumar²⁹⁾ veröffentlicht worden. Diese Methode führt bis zu Termen 2. Ordnung in den Deformationen auf die gleichen Ergebnisse wie die hier benutzte Methode^{29,5)}. Die Autoren benötigen allerdings zur praktischen Durchführung eine Anzahl von Annahmen und Näherungen, deren Bedeutung im Folgenden diskutiert werden soll.

Baranger und Kumar gehen von einem sphärischen Oszillator-Schalenmodell aus, dessen Zustände an die experimentellen angepaßt werden. Die Wahl dieser Zustände hat großen Einfluß auf die Resultate ihrer Theorie besonders in den Übergangsbereichen. In diesem Schalenmodell berücksichtigen sie nur in den beiden äußersten Oszillatorschalen die Paar + Quadrupolkraft als Restwechselwirkung. Zusätzlich zu dieser Einschränkung verkleinern sie die Matrixelemente der P_2 -Kraft in der oberen Schale um einen festen, aber willkürlichen Faktor, um Übereinstimmung ihrer Resultate mit dem Experiment zu erzielen. Der Rumpf wird phänomenologisch berücksichtigt und über sein Quadrupolmoment an die Teilchen angekoppelt. Der Massenparameter B_c des Rumpfes und die Koppelungs-Stärke werden gefittet. Der Massenparameter B_{sp} der äußeren Nukleonen dagegen wird im cranking-Modell berechnet.

Da in der Theorie von Baranger und Kumar (B + K) die deformationsabhängigen Teile des Hamiltonoperators in Eigenzuständen des sphärischen Oszillator diagonalisiert werden, sind die Einzelteilchenzustände des Rumpfes und der äußeren Nukleonen vollständig entkoppelt. Diese Annahme ist streng für kleine Deformationen gültig, während für stark deformierte Kerne diese Koppelung die Oszillatorschalen der Rumpf- und der Valenzteilchen mischt. Daher ist die Methode von B+K

prinzipiell nicht brauchbar für die Berechnung von Spaltbarrieren etc. Dagegen kann die hier entwickelte Methode zur Berechnung der PES ohne jede theoretische Schwierigkeit diese Prozesse beschreiben durch Berücksichtigung höherer Multipole in (3), die dazu parallele Veränderung des Einteilchen-Hamiltonoperators (8) und eine Veränderung der Anpassung in Kapitel IVa, die die Berücksichtigung höherer Ordnungen in den Deformationsparametern ermöglicht: Diese Methode ist prinzipiell anwendbar für den Aufbau eines einheitlichen Modelles des gesamten Kollektivverhaltens der Atomkerne, das sowohl die Grundzustandseigenschaften als auch den Spaltprozeß beschreibt. Abgesehen von dieser Schwäche des B+K Modelles ist der Einfluß des Rumpfes auch für die Grundzustandseigenschaften beachtlich und gut bekannt. Der Rumpf beeinflusst wesentlich die Grundzustandsdeformation und ist entscheidend für die Symmetrie der Kerngestalt (s.o.). Die Autoren berechnen daher mikroskopisch in ihrem Rumpf-Teilchen-Ansatz nur einen kleinen Beitrag zum vollständigen kollektiven Verhalten.

Die Berechnung des Massenparameters B_{sp} im Rahmen des cranking Modells ist sicherlich im Rahmen eines mikroskopischen Modells konsistenter als der hier eingeschlagene Weg, B aus dem Experiment zu entnehmen. Jedoch ist es einerseits nicht das Ziel dieser Arbeit, eine vollständige mikroskopische Theorie des Kollektivverhaltens der Atomkerne vorzulegen, andererseits trägt im Modell von B+K der Massenparameter B_c des Rumpfes ca. 50% zum gesamten Wert bei, so daß dieser nicht wesentlich genauer als der hier benutzte ist. Außerdem ist bereits diskutiert worden, daß B keinen großen Einfluß auf die kollektiven Anregungen besitzt, die nahezu vollständig von der Struktur der PES bestimmt werden.

Während in dem hier dargelegten Modell keine freien Parameter für die PES angepaßt werden mußten, müssen B+K zwei zusätzliche Parameter bestimmen: die Stärke der Quadrupolkraft

und der Rumpf - Teilchen - Koppelung, um richtige Deformationen und Steifheiten zu erhalten. Außerdem kann die willkürliche Verkleinerung der P_2 - Matrixelemente in der oberen Schale im Rahmen ihres Modells nicht begründet werden. In diesem Punkt verlassen daher B+K die Grundlage einer konsistenten Modellbeschreibung.

Der Vergleich der von B+K berechneten kollektiven Energien mit dem Experiment zeigt, daß die theoretischen Vibrationsenergien um ca. 1 - 1.5 MeV zu hoch liegen. Lediglich die Gobrestruktur der β - Vibrationen wird wiedergegeben, während das spezielle Verhalten dieser Energien im Bereich $150 \leq A \leq 160$ im Gegensatz zu den hier vorgelegten Rechnungen nicht reproduziert wird. Dies bedeutet, daß ihr Modell gerade in seinem Haupt- Anwendungsbereich, den Übergangsbereichen mit kleinen Kerndeformationen, für die der Rumpf - Teilchen - Ansatz genähert gültig ist, versagt. Die Struktur der β -Vibrationsenergien in den neutronenarmen Isotopen von Sm, Gd und Dy wird durch die Konkurrenz der plötzlich auftretenden Deformationen mit den nur kleinen Deformationsenergien erzeugt. Die Diskrepanz zwischen den B+K Werten und dem Experiment zeigt daher, daß in ihren Berechnungen die Deformationsenergien, von denen die Krümmungen genähert linear abhängen, systematisch überschätzt werden; denn die Grundzustandsdeformationen werden richtig wiedergegeben. Die Deformationsenergien sind in den Übergangsbereichen um ca. 100% und in den starkdeformierten Kernen um etwa 25% zu groß. Diese Feststellung wird außerdem gestützt durch die Berechnungen von Seeger im Strutinsky-Verfahren, deren Werte hervorragend mit den hier berechneten übereinstimmen.¹¹⁾ Die Berücksichtigung der vollständigen Coulomb - Kraft, von der in den B+K Berechnungen lediglich der Quadrupolanteil berücksichtigt ist, würde diese Diskrepanz noch weiter vergrößern. Um den Einfluß des Rumpfes auf die volle PES quantitativ zu untersuchen, wurden die gleichen Berechnungen wie oben für den Kern W^{180} ,

jedoch mit einem inerten doppelmagischen Sn^{132} Rumpf durchgeführt (s. Abb. 15). Während dieser Rumpf eine sehr steile PES mit dem Minimum bei $\alpha_0 = 0$ besitzt, begünstigen die äußeren Nukleonen stark einen deformierten Grundzustand mit ca. 17 MeV Deformationsenergie. Die Addition beider Potentialkurven, die über den Maßstabsfaktor $\hbar \omega_0$ ($A = 180$) gekoppelt sind, ergibt dann die vergleichsweise weiche PES von W^{180} , die nur ca. 2 MeV Deformationsenergie besitzt. Wegen dieses überaus deutlichen Effektes des Rumpfes lassen sich die zu großen Deformationsenergien von B+K direkt mit ihrer Behandlung des Rumpfes erklären, dessen Kopplung an die äußeren Teilchen offensichtlich zu schwach ist.

VII. Stabilität und Struktur superschwerer Atomkerne

VIIa Gebiete relativer Stabilität für superschwere Atomkerne

Die vorausgegangenen Kapitel haben gezeigt, daß die verwendete Methode zur Berechnung der PES gut geeignet ist, die kollektiven Vibrationen von Atomkernen richtig zu beschreiben, d.h. also, die Minima der PES und die Krümmungen an ihnen korrekt wiederzugeben. Diese gute Übereinstimmung legt es nahe, auch die Lage der Spaltbarriere als eines weiteren stationären Punktes der PES und ihre Krümmung zu untersuchen, um daraus Halbwertszeiten für die spontane Spaltung berechnen zu können. Um diese Berechnungen nicht zu aufwendig zu gestalten, wird die Kerngestalt auf lediglich axialsymmetrische, ellipsoidische Deformationen beschränkt. Es wird also keine Einschnürung zugelassen. Dies beschränkt die Berechnungen auf das Gebiet sehr schwerer Kerne, die am Sattelpunkt nur sehr wenig von der Grundzustandsgestalt abweichen. Diese Berechnung ist daher insbesondere geeignet, Aussagen über die Stabilität und Struktur superschwerer Atomkerne zu liefern.

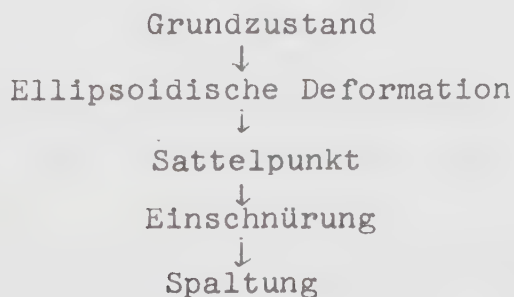
Da infolge der quadratisch mit der Kernladungszahl Z ansteigenden Coulombenergie die klassischen Massenformeln mit steigendem Z gegen Spaltung immer instabilere Kerne liefern, ist unmittelbar klar, daß nur Schaleneffekte zu einer Insel relativer Stabilität jenseits der bekannten Kerne führen können. Aus diesem Grund ist die Extrapolation des Schalenmodells in diese Gebiete die kritische Prozedur. An Abb. 16 ist das Einteilchenspektrum des Hamiltonoperator (8) für die Deformation $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ für zwei Parametersätze für κ und μ dargestellt. Während die Extrapolation des von Seeger¹¹⁾ gefundenen Parametersatzes (Satz A) infolge der Schalenabhängigkeit des Parameters κ eindeutig möglich ist (s. Kap. IVa), sind in dem Vergleichsspektrum die von Nilsson und Mitarbeitern²²⁾ für die Seltenen Erden und Aktiniden gefundenen Parameter linear

extrapoliert (Satz B). Der Vergleich zeigt eine überraschend gute Übereinstimmung der magischen Zahlen jenseits $N=126$ und $Z=82$, wenn auch die Spektren zwischen ihnen teilweise beträchtliche Abweichungen zeigen, die auf die sehr unterschiedlichen Parametersätze zurückzuführen sind. Da sich die Stabilität gegenüber β -Zerfall zumindest qualitativ an Hand von klassischen Massenformeln gut abschätzen läßt, folgt, daß relativ stabile superschwere Element in der (N,Z) Ebene nur im extrapolierten Tal der β -stabilen Kerne zu erwarten sind. Drei mögliche Extrapolationen^{23,24)}, die alle die β -Stabilitätslinie im Bereich der bekannten Kerne vernünftig wiedergeben, sind in Abb. 17 dargestellt. Sie geben zugleich eine gewisse Breite für dieses Tal. Gegen Spaltung stabile Kerne sind nun dann zu erwarten, wenn doppelmagische Punkte der (N,Z) -Ebene in dieses Tal fallen. Aus diesem Grund ist in der Abb. 17 die Ebene mit einem Netz von magischen Zahlen überzogen worden, an dessen Gitterpunkten jeweils doppelmagische Konfigurationen liegen. Aus diesem einfachen, nur qualitative Aussagen über die Stabilität liefernden Bild sind im Massenzahlbereich bis $A = 500$ drei ausgezeichnete Konfigurationen (Z,N) zu erwarten: $(114, 184 \text{ oder } 196)$, $(164, 318)$ und mit etwas weniger Sicherheit: $(164, 272)$, da $N=272$ als magische Zahl nur in der Extrapolation der Nilsson-Parameter auftritt.

VIIb Potentialenergieflächen der superschweren Kerne.

In den Abbildungen 18 sind für die angegebenen Stabilitäts-Gebiete die Potentialenergiekurven $E(\alpha_0)$ dargestellt. Der α_1 -Freiheitsgrad ist hier vernachlässigt, da Kerne in der Nähe von Schalenabschlüssen stets die axialsymmetrische Gestalt energetisch bevorzugen (s. Kap V). Ebenso ist aus Abb. 13 und 14 deutlich ersichtlich, daß der Gradient von $V(\alpha_0, \alpha_1)$ stets auf den Rändern $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\alpha_0$ der Segmente minimal ist. Für den Ablauf des Spaltprozesses ist daher die α_1 -Abhängigkeit der PES ohne Bedeutung; sie beeinflusst lediglich die kollektive Dynamik.

Es ist eine Eigenart des Oszillatorpotentials im Einzelteilchen - Hamiltonoperator (8), daß $V(\alpha_0)$ für große Deformationen stets unendlich wird, infolge der für große α_0 sehr hohen Nullpunktsenergie der Nukleonen, die mit der kurzen Halbachse des Ellipsoides verbunden ist. Andererseits aber ist klar, daß der Spaltprozeß durch ellipsoidische Deformationen nicht vollständig beschrieben werden kann und daß jenseits des Sattelpunktes zudem die Annahme der Adiabasie zweifelhaft wird. Der Spaltvorgang läßt sich deshalb durch folgendes Bild beschreiben:



Die Potentialkurven in Abb. 18 gestatten es, diesen Vorgang bis zum Sattel zu verfolgen, der deutlich auftritt bei einer Deformation $\alpha_0 \approx 0.3$. Gleichzeitig zeigen diese Kurven die starke Abhängigkeit der Spaltbarrieren von der Parameterextrapolation im Schalenmodell. Beide Parametersätze führen zwar zu gleichen magischen Zahlen und daher gleichem qualitativen Verhalten in diesen Kernen, Gestalt und Höhe der Spaltschwelle hängen aber sehr stark vom benutzten Schalenmodell ab. Insbesondere in den Kernen um $Z = 164$ zeigen die Spaltbarrieren Höhenunterschiede bis zu 300%, während für die Kerne um $A=300$ die Differenz nur bis maximal 80% beträgt. Dieser Unterschied deutet selbstverständlich auf die Mehrdeutigkeit der Extrapolation hin, die für $A > 400$ infolge der sehr großen Entfernung von bekannten Kernen zweifelhafter als für $A \approx 300$ ist; denn gerade die energetisch höchsten Einteilchenzustände gehen infolge ihrer sehr hohen Energie und deshalb auch wesentlich stärkeren Abhängigkeit von der Deformation bedeutend stärker gewichtet in die Summe aller Einteilchenenergien ein als die Niveaus der Rumpfnukleonen. Diese Tatsache zeigt deutlich, daß im Gegensatz zum Verhalten bei den kollektiven Vibrationen, die immer nur mit kleinen Deformationsänderungen verbunden sind, der Rumpf für den Spaltprozeß mit seinen vergleichsweise starken Gestaltsveränderungen keine bedeutsame Rolle spielt. Er ist lediglich insoweit wichtig, als die Rumpfnukleonen durch ihre Wechselwirkung mit den äußeren Teilchen das gemeinsame Hartree-Fock-Feld und damit die magischen Zahlen bestimmen.

Der bedeutsame Einfluß der äußeren Teilchen auf die Spaltbarrieren zeigt sich auch in der Abhängigkeit dieser Barrieren von der Zustandsdichte an der Fermikante. Diese Zustandsdichte kann unmittelbar durch die Berechnung der gap - Konstanten Δ im BCS - Formalismus untersucht werden. Macht man die vereinfachende Annahme einer gleichförmigen Zustandsverteilung, so kann die gap-Gleichung (20) analytisch

gelöst werden, indem die Summation durch eine Integration ersetzt wird. Dies führt auf⁴⁾:

$$\Delta \sim e^{-\frac{1}{\int G}} \quad (44)$$

wobei G die Stärke der Paarkraft und $\int$ die Zustandsdichte darstellt. Lokale Schwankungen dieser Dichte mit der Deformation finden sich also in der Funktion $\Delta(\alpha_0)$ wieder. Für die doppeltnmagischen Superkerne ist wegen der großen Energielücke an der Fermikante bei $\alpha_0 = 0$ die Zustandsdichte sehr klein; dies äußert sich darin, daß die gap-Gleichung keine Lösung mehr besitzt, Δ also Null wird. Bei ansteigender Deformation mischen dann die besetzten Zustände mit denen oberhalb der Fermikante, so daß $\int$ und damit auch Δ ansteigen. Bei weiterer Vergrößerung der Deformation kommen dann auch Zustände der übernächsten Schale unter die ursprüngliche Energie der Fermikante herab. Bevor dieses eintritt, entstehen jedoch typische Verdünnungen in der Zustandsdichte der Einteilchenniveaus (s. Abb. 19), die sich in einer Verkleinerung der Energielücke Δ wiederfinden. Kleine Zustandsdichten führen nun aber stets zu einem Energiegewinn, wie durch die sphärische Gestalt der doppeltnmagischen Kerne mit ihren extrem kleinen Zustandsdichten an der Fermikante sehr deutlich aufgezeigt wird. Diese Verkleinerung von $\int$ führt daher zum Absinken der PES bei $\alpha_0 \approx 0.4$ und damit zur Entstehung der Spaltbarriere. Für das Beispiel ($Z = 114$, $N = 184$) ist der quantitative Zusammenhang zwischen $E(\alpha_0)$ und $\Delta(\alpha_0)$ und damit auch $\int(\alpha_0)$ in Abb. 20 aufgezeigt. Der Prozeß der Spaltung ist damit eng verknüpft mit der Lage der Einteilchenniveaus an der Fermikante und deren Deformationsabhängigkeit.

Für die Kerne in den Bereichen zwischen diesen doppeltnmagischen Kernen zeigen die Potentialkurven Minima erst bei $\alpha_0 \approx 0.6$ mit einer Tiefe von mehr als 10 MeV, während für die oblaten Gestalten bis $\alpha_0 \approx 0.9$ überhaupt kein Minimum auf-

tritt. Dies zeigt, daß für vernünftige Deformationen der Ellipsoide keine Barriere existiert. Diese Kerne sind also hochgradig instabil gegenüber spontaner Spaltung.

VII c Lebensdauern superschwerer Atomkerne

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nicht, quantitativ genaue Voraussagen über die superschweren Atomkerne zu liefern, sondern vielmehr die Lebensdauer dieser Kerne nach unten hin abzuschätzen. Aus diesem Grunde sind in Tabelle 2 die Halbwertszeiten für Spaltung stets nach der sehr einfachen Methode, die berechneten Barrieren parabolisch in der Form:

$$E(\alpha_0) = E_f + E_s - \frac{1}{2} C_f (\alpha_0 - \alpha_0^{(m)})^2 \quad (45)$$

anzunähern, berechnet worden. Für die Durchtunnelungswahrscheinlichkeiten durch die eindimensionale Spaltbarriere $E(\alpha_0)$ gilt dann in WKB Näherung:

$$P = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{\alpha_0'}^{\alpha_0''} \sqrt{2B(E(\alpha_0) - E_f)} d\alpha_0 \right] \equiv \exp(-K) \quad (46)$$

Dabei gilt: $\alpha_0^{(m)} = \frac{1}{2} (\alpha_0' + \alpha_0'')$

Führt man die Spaltfrequenz $\hbar \omega_F$ ein:

$$\hbar \omega_F = \sqrt{\frac{C_F}{B/\hbar^2}} \quad (47)$$

so folgt:

$$K = \frac{2\pi E_s}{\hbar \omega_F} \quad (48)$$

Um die Anzahl der Spaltereignisse in der Zeiteinheit zu bekommen, wird P mit der Frequenz $\omega_{\nu b}$ der β -Vibrationen multipliziert, die gegeben ist durch

$$\hbar \omega_{\nu b} = \sqrt{\frac{C_0}{B/\hbar^2}} = E_{\nu b} \quad (49)$$

Dann folgt für die Lebensdauer τ in Sekunden:

$$\tau = \frac{1}{\nu_{\nu b}} \cdot \frac{1}{P} = \frac{2\pi \hbar}{E_{\nu b}} \cdot \frac{1}{P} \quad (50)$$

Rechnet man τ endlich auf die Halbwertszeit $t_{1/2}$ in Jahren um und bildet den Logarithmus, so erhält man:

$$^{10}\log t_{1/2} = -28.04 - ^{10}\log E_{\nu b} + 0.434 \cdot K \quad (51)$$

für die Halbwertszeit der Kerne gegenüber spontaner Spaltung.

Für die Berechnungen der Potentialenergiekurven in Abb. 18 sind bei den Neutronen alle Zustände mit $N \leq 13$ und bei den Protonen mit $N \leq 10$ berücksichtigt worden. Für die Oszillatorenenergie wurde hier der Wert:

$$\hbar \omega_0 = 41 \cdot A^{-1/3} \text{ MeV}$$

benutzt, für die Konstanten der Paarkraft die Werte

$$G_p = \frac{32.0}{A} \text{ MeV} \quad G_n = \frac{29.0}{A} \text{ MeV}$$

die in den Seltenen Erden und Aktiniden die experimentellen Energielücken gut reproduzieren, wenn für die Berechnung der Paarenergie wieder 24 Einteilchenzustände (jeder besetzt mit 2 Teilchen entsprechend den möglichen Drehimpulsorientierungen) symmetrisch zur Fermikante berücksichtigt werden. Für die Coulomb-Energie wurde wieder der Ausdruck (35) mit (36) verwendet.

In die Berechnung der Spaltwahrscheinlichkeiten in (46) geht auch der Massenparameter B ein. Da die allgemeinste kinetische Energie bis zu Termen dritter Ordnung in $\alpha^{[2]}$ die Gestalt hat:

$$T = \frac{\sqrt{5}}{2} B_2 \left[\begin{smallmatrix} [2] & [2] \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right]^{[0]} + B_3 \left[\left[\begin{smallmatrix} [2] & [2] \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix} \right]^{[2]} \times \begin{smallmatrix} [2] \\ \alpha \end{smallmatrix} \right]^{[0]} \quad (52)$$

ist unmittelbar klar, daß man einen effektiven Massenparameter B erhält, der von $\alpha^{[2]}$ abhängt. Im kernfesten System gilt dann:

$$T = \frac{1}{2} B(\alpha_0) \cdot \dot{\alpha}_0^2 \quad (53)$$

mit: $B(\alpha_0) = B_2 (1 + 2 B_3 \alpha_0)$

Sowohl das hydrodynamische Modell als auch mikroskopische Berechnungen im "cranking"-Modell²⁴⁾ zeigen, daß B_3 positiv ist, B also mit α_0 zunimmt. Ersetzt man also B durch B_2 , so wird K und damit auch $t_{1/2}$ nach unten abgeschätzt. Aus diesem Grunde wurde für alle Rechnungen B durch B_2 ersetzt, das für sphärische Kerne durch (29b) gegeben wird. Um auch den Einfluß des benutzten B -Wertes auf die Halbwertszeiten zu untersuchen, wurde B mit der äußersten Grenze für die $T(E2)$ Werte wie in Kap. IIIf berechnet. Da alle bekannten $T(E2, 2+ \rightarrow 0+)$ Werte durch die Relation

$$T(E2, 2+ \rightarrow 0+) = (4 \pm 2) \cdot 10^{10} E^4 Z^2 A^{-1} \quad (54)$$

erfaßt werden¹⁰⁾, wurde B unter Benutzung der oberen Schranke dieses Wertes berechnet. Dies liefert:

$$B/\hbar^2 = 1.25 \cdot 10^{-3} A^{2/3} \text{ MeV}^{-1} \quad (55)$$

also eine Verkleinerung des Wertes (29b) auf 50%. Die mit diesem Massenparameter berechneten Halbwertszeiten sind ebenfalls in Tab. 2 angegeben.

In allen Berechnungen des hydrodynamischen Modells treten die Spaltschwellen in der prolaten Gestalt auf. Da die Coulombenergie stark die oblate Kerngestalt begünstigt, macht dieses Ergebnis den starken Einfluß der Oberflächenenergie deutlich, die für prolate Deformationen weniger stark ansteigt als für oblate und dabei die Coulombenergie kompensiert. Im Nilssonmodell wird die Oberflächenenergie durch den $\vec{L}^2$ -Term in (8) simuliert, der hauptsächlich auf die Oberflächennukleonen wirkt und für diese das attraktive Oszillatorpotential verkleinert. Da der Einfluß dieses Terms für große α_0 stark abnimmt, ist unmittelbar klar, daß er lediglich am Grundzustand die Oberflächenenergie hinreichend simulieren kann. In den Abbildungen 18 fällt nun bei einem Teil der Kurven auf, daß die Barrieren für $\alpha_0 < 0$ für einige Kerne und insbesondere für den Seeger'schen Parametersatz niedriger sind als für $\alpha_0 > 0$. Diese Tatsache muß nach dem oben Gesagten voll der mangelhaften Simulation der Oberflächenenergie durch den Hamiltonoperator (8) zugeschrieben werden. Aus diesem Grunde wurde für die Berechnung aller Halbwertszeiten nur die Barriere auf der prolaten Seite benutzt. Um ein Maß für die Abhängigkeit der Halbwertszeiten von der Schwellhöhe und deren Gestalt zu erhalten, sind in der Tabelle 2 auch die Halbwertszeiten für den zweiten Satz der Kernparameter für einige Kerne berechnet. Die Ergebnisse zeigen trotz teilweise beträchtlicher Unterschiede zwischen den mit verschiedenen Werten für B und verschiedenen Kernparametern gewonnenen Halbwertszeiten, daß für eine Reihe von Kernen bis $A \approx 500$ gegenüber spontaner Spaltung relativ stabile Kerne erwartet werden können. Diese Aussage wird auch nicht geändert durch die Berücksichtigung komplizierterer Kerngestalten im Hamiltonoperator (8). Berechnungen von Schalenkorrekturen zur klassischen Massenformel im Strutinsky - Verfahren²¹⁾, die eine Hexadekupol - Deformation des Einteilchen - Potentials zulassen, zeigen, daß der Y_4 - Freiheitsgrad erst für Defor-

mationen $\alpha_0 \gtrsim 0.4$, also jenseits der Spaltschwelle wirksam wird und somit lediglich deren Abfall nach großen Deformationen hin beeinflusst²⁴⁾. Da die hier verwendete Parabelnäherung für die Barrieren in (45) ohnehin die Dicke der Spaltschwellen systematisch unterschätzt, besitzt dieser Term keinen Einfluß auf die qualitative Struktur der Ergebnisse.

Diese Werte zeigen vor allem, daß außer der schon oft diskutierten relativ stabilen Region um $A \approx 300$, im Gebiet $A \approx 480$ mit großer Wahrscheinlichkeit eine weitere "Insel der Stabilität" erwartet werden kann, die mit dem Schalenabschluß der Protonen bei $Z=164$ verbunden ist. Diese magische Zahl tritt in allen vernünftigen Extrapolationen des Schalenmodells auf und führt infolge des sehr hohen energetischen Abstandes von mehr als 2 MeV zum nächsten Schalenmodellzustand zu einer derartigen Härte der sphärischen Gestalt, die ausreicht, die deformierende Wirkung der Coulomb - Kraft zu kompensieren.

Mit der Entwicklung von Schwerstionen - Beschleunigern, die geeignet sind, Ionen bis zu Uran zu beschleunigen, werden auch diese Kerne um $Z=164$ für das Experiment zugänglich.

In der Tabelle 2 sind außerdem die berechneten kollektiven Vibrationsfrequenzen angegeben. Sie liegen im Bereich $A \approx 300$ bei ca. 500 - 700 KeV und bei $A \approx 480$ bei etwa 300 - 400 KeV, also beträchtlich unter den Schwellenergien für Einzelteilchenanregungen. Deshalb ist in diesen Gebieten die Adiabasie zwischen kollektiven und Einzelteilchen-Anregungen und damit die benutzte Methode zur Berechnung der PES hervorragend gerechtfertigt. In Abb. 21 ist die vollständige Fläche $E(\alpha_0, \alpha_1)$ für die Kerne (114,184) und (114,196) in der Nähe des Grundzustandes angegeben. Diese Flächen wurden wie in den früheren Kapiteln durch Ausnutzung der Rotationsinvarianz der vollständigen PES gewonnen und geben einen guten Einblick in die kollektive Dynamik dieser Kerne.

Um auch die Stabilität dieser Kerne gegen α -Zerfall berechnen zu können, muß die Gestalt der Barriere für die Emission von α -Teilchen bekannt sein. Da aber für sie bis jetzt keine zuverlässigen Informationen vorliegen, muß man im wesentlichen halbempirische Abschätzungen benutzen. Löst man für S-Wellen das eindimensionale Problem des Durchgangs eines α -Teilchens durch eine reine Coulomb - Potentialschwelle in WKB-Näherung, so erhält man folgende Abhängigkeit der Halbwertszeit $t_{1/2}$ vom Q-Wert des α -Zerfalls Q_α :²⁵⁾

$$^{10} \log t_{1/2} = C_1 (Z Q_\alpha^{-1/2} - C_2 Z^{2/3}) - C_3 \quad (56)$$

Die Koeffizienten C_i sind in einem empirischen Fit, der die α -Zerfallsdaten der Elemente mit $N \geq 126$ benutzte, bestimmt worden, so daß schließlich gilt:²⁶⁾

$$^{10} \log t_{1/2}(y) = 1.61 \cdot (Z \cdot Q_\alpha^{-1/2} - Z^{2/3}) - 28.9 \quad (56 \text{ a})$$

Dabei gibt Z die Kernladung des Tochterkerns an. Die Q -Werte für den α -Zerfall sind für das Gebiet $A \approx 300$ von Seeger durch Extrapolation einer Massenformel mit Schalenkorrekturen des Strutinsky-Typs, die die bekannten Kernmassen hervorragend wiedergibt, berechnet worden¹¹⁾. Sie liegen bei $A \approx 300$ in der Größenordnung von 6 - 10 MeV. Ihre Werte und die aus ihnen folgenden Halbwertszeiten sind ebenfalls in Tab. 2 angegeben. Sie liegen für die Isotope von $Z = 114$ jedenfalls über einem Tag. Auch die Halbwertszeiten gegenüber α -Zerfall lassen also Lebensdauern für die superschweren Elemente um $A=300$ erwarten, die ein Experimentieren mit ihnen möglich machen. Zugleich zeigen diese Ergebnisse aber auch,

daß nicht wie allgemein angenommen, spontane Spaltung, sondern vielmehr α -Zerfall der dominierende Zerfallskanal für diese Elemente sein sollte. Diese Möglichkeit ist bis jetzt in der Literatur noch nicht detaillierter untersucht worden.

Kürzlich sind von Nilsson et al.²⁷⁾ Berechnungen der gleichen Größen wie hier für das Gebiet $A \approx 300$ veröffentlicht worden. Diese Autoren gehen aus von einem Einteilchenoperator, der nicht nur eine Y_1 -, sondern auch eine Y_4 -Abhängigkeit des Einteilchenpotentials enthält und somit bis zu einem gewissen Grade auch Einschnürungen beschreiben kann. Um die oben erwähnte Schwierigkeit des Anstiegs von E zu großen Deformationen hin, die auch bei Einschluß höherer Deformationsarten bestehen bleibt und eine Eigenart des Oszillatorpotentials darstellt, zu umgehen, verwenden diese Autoren den Schalenmodellhamiltonoperator lediglich, um nach der Strutinsky-Methode²¹⁾ Schalenkorrekturen zu einer klassischen Massenformel zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Theorie für die Spaltwahrscheinlichkeiten stimmen gut mit den hier gewonnenen Werten überein. Jedoch ist die verwendete Methode theoretisch unbefriedigend. Sie besteht im wesentlichen im heuristischen Aneinanderpassen zweier wesentlich verschiedener Kernmodelle, des Schalenmodells und des Tröpfchenmodells, um so den gewünschten Abfall der Potentialenergiefläche zu großen Deformationen hin durch das Verhalten des Tröpfchenmodelles zu erzwingen. Es ist wichtig, explizit zu betonen, daß die im Strutinsky - Ansatz enthaltene Gleichsetzung der Energie der Massenformel mit der Energie einer gleichförmigen Zustandsverteilung im Schalenmodell bei der Berechnung der Einteilchenzustände in einem deformierten Oszillator - Schalenmodell infolge ihrer unterschiedlichen Deformationsabhängigkeit nicht erfüllt ist.

Um einerseits das Konzept einer konsistenten mikroskopischen Modellberechnung für die gesamte Potentialenergiefläche aufrecht erhalten zu können, andererseits aber auch für große

Deformationen das Verhalten der PES korrekt reproduzieren zu können, muß in künftigen Berechnungen dieser Fläche das Einteilchenpotential (8) geändert werden. Insbesondere muß an Stelle des deformierten Oszillatorpotentials ein solches Einteilchenpotential eingeführt werden, welches nicht nur eine Einschnürung der Äquipotentialflächen, sondern auch eine Vorformierung der Spaltbruchstücke vor dem Abreißpunkt erlaubt. Es muß daher möglich sein, durch geeignete Wahl der Potentialparameter im Kerninnern zwei Bereiche mit geschlossenen Äquipotentialflächen zu erzeugen (s. Abb. 22). Durch einen derartigen Prozeß wird eine Potentialbarriere für die Nukleonen an der Stelle der Einschnürung aufgebaut, die somit deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit dort und damit die Nullpunktsenergie an dieser Stelle herabsetzt. Mit einem derartigen Einteilchenpotential ist es möglich, die Potentialenergiefläche bis zum Abreißpunkt zu verfolgen, ohne daß ihr Wert bei Annäherung an diese Genze unendlich wird.

VIII. Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist gezeigt worden, wie es durch Ausnutzung der Symmetrien der Potentialenergiefläche möglich ist, mit kleinstem numerischen Aufwand diese Fläche mikroskopisch zu berechnen. Die Beiträge der dreiwesentlichen Teile: der Einzelteilchen - Härte, der Paarkraft und der Coulomb - Wechselwirkung zu ihrer Struktur sind ebenso untersucht worden wie der Einfluß der Rumpfnukleonen. Insbesondere gestattet es die Potentialenergiefläche, das Kollektivverhalten der Kerne sehr einfach als Funktion der Einzelteilchen - Schalenstruktur zu verfolgen. Daraus konnte der Schluß gezogen werden, daß die Einteilchen - Konfigurationen nur das grobe Verhalten der Kollektivzustände bestimmen, während die Paarkraft wesentlich ist für die energetische Höhe dieser Zustände und sie um ca. 50% in der Energie absenkt. Die Coulomb - Energie schließlich ist nötig um die experimentellen Grundzustandsdeformationen erklären zu können und hat einigen Einfluß auf die γ -Vibrationen, die durch sie weicher werden. Die Potentialenergiefläche ist in der Nähe ihres Minimums mit Hilfe der experimentellen Daten für die seltenen Erden geprüft worden. Die Übereinstimmung ergab sich dabei als gut. Insbesondere lieferte dieser Vergleich die wichtige Aussage, daß für $150 \leq A \leq 166$ das Kollektivverhalten nahezu ausschließlich durch die Neutronenkonfiguration bestimmt wird.

Im letzten Teil der Arbeit wurde die entwickelte Methode dann zur Berechnung von Spaltbarrieren im Gebiet superschwerer Elemente benutzt, um so gleichzeitig Aussagen über die Stabilität dieser Kerne gegenüber spontaner Spaltung zu erhalten. Die gewonnenen Halbwertszeiten zeigen trotz einer erheblichen Fehlergrenze, daß für eine Reihe von Gebieten jenseits der bisher bekannten Massen gegen Spaltung relativ stabile Kerne erwartet werden können. Auch die Stabilität gegenüber β und α -Zerfall ist mit Hilfe semiempirischer Beziehungen abgeschätzt worden. Die

daraus gewonnenen Werte deuten daraufhin, daß für super-schwere doppelmagische Kerne der α -Zerfall der kritischste Prozeß sein dürfte.

Am Ende der Arbeit ist schließlich nach einem Vergleich mit Theorien anderer Autoren ein Weg aufgezeigt worden, in zukünftigen Berechnungen von Spaltbarrieren bis jetzt noch bestehende Schwierigkeiten, die mit der Veränderung des Einteilchenpotentials in der Spaltung verknüpft sind, durch Abänderung des Einschnürungsprozesses zu überwinden.

Anhang 1

Diagonalisierung des Schalenmodell-Operators (8)

Der Hamiltonoperator des benutzten Schalenmodelles lautet:

$$H_{sp} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2) + C \hat{l}'^2 + D (\vec{l}'^2 - \langle \vec{l}'^2 \rangle) \quad (A.1)$$

Gesetzt wird nun nach (10):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_0 f_x(a_0, a_c) \\ \omega_y &= \omega_0 f_y(a_0, a_c) \\ \omega_z &= \omega_0 f_z(a_0) \end{aligned} \quad (A.2)$$

mit:

$$\omega_0 = \omega_0 \cdot (f_x \cdot f_y \cdot f_z)^{-\frac{1}{3}}$$

Dann wird eine Transformation auf dimensionslose Koordinaten durchgeführt:

$$x = \left(\frac{m\omega_x}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x', \quad y = \left(\frac{m\omega_y}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} y', \quad z = \left(\frac{m\omega_z}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} z' \quad (A.3)$$

(A. 1) geht dann über in:

$$\begin{aligned} H_{sp} &= \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \cdot \left[f_x \left(-\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + x'^2 \right) + f_y \left(-\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + y'^2 \right) + f_z \left(-\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + z'^2 \right) \right] + \\ &+ C \vec{l}'^2 + D (\vec{l}'^2 - \langle \vec{l}'^2 \rangle) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Gleichzeitig ist hierbei der Drehimpulsoperator l' im (x', y', z') -Raum ersetzt worden durch den analogen Operator im (x, y, z) -Raum. Diese Näherung wird von Nilsson²⁸⁾ ausführlich diskutiert und kann mit dem reinen Modellcharakter der l' -abhängigen Terme in (A. 1) begründet werden.

Mit dem Übergang auf Zylinderkoordinaten (φ, z) und der Setzung:

$$f_s = \frac{1}{2} (f_x + f_y) \quad f_d = \frac{1}{2} (f_x - f_y)$$

geht dann (A.4) über in:

$$H_{sp} = \frac{1}{2} \hbar \omega_c \left[f_0 \cdot (-\Delta_f + f^2) + f_z \cdot \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2 \right) \right] + H' + C \vec{\ell} \cdot \vec{S} + D \cdot (\vec{\ell}^2 - \langle \vec{\ell}^2 \rangle_0) \quad (A.5)$$

mit

$$H' = \frac{1}{2} \hbar \omega_c f_0 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + x^2 - y^2 \right)$$

Der 1. Teil von H ist diagonal in den Zuständen:

$$|N_f N_z \Lambda \Sigma\rangle = |N_f \Lambda\rangle \cdot |\Lambda\rangle \cdot |N_z\rangle \cdot |\Sigma\rangle$$

mit $|\Sigma\rangle$ als Spineigenfunktion und:

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{i\Lambda\varphi}$$

$$|N_z\rangle = \left[\sqrt{\pi} N_z! 2^{N_z} \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} H_{N_z}(z)$$

$$|N_f \Lambda\rangle = \left[\frac{2\Gamma(n+1)}{(\Gamma(|\Lambda|+n+1))^3} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho^{|\Lambda|} L_n^{|\Lambda|}(\rho^2) \quad (A.6)$$

mit:

$$n = \frac{1}{2} (N_f - |\Lambda|)$$

Die Funktionen $L_n^{|\Lambda|}$ stellen die Laguerreschen Polynome dar, $H_{N_z}(z)$ steht für die Hermiteschen Polynome.

Für die Matrixelemente der l-abhängigen Potentialterme folgt dann leicht:

$$\begin{aligned} \langle N_f-2, N_z+2, \Lambda | \vec{\ell}^2 | N_f N_z \Lambda \rangle &= \\ &= \left[(N_f-1) \cdot (N_f+1) (N_z+1) (N_z+2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \langle N_f+2, N_z-2, \Lambda | \vec{\ell}^2 | N_f N_z, \Lambda \rangle &= \\ &= \left[(N_f+1+2) \cdot (N_f-1+2) \cdot N_z \cdot (N_z-1) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\langle N_f, N_z, \Lambda | \vec{\ell}^2 | N_f N_z \Lambda \rangle = \Lambda^2 + 2N_z N_f + 2N_z + N_f$$

$$\begin{aligned} \langle N_f - 1, N_z + 1, \Lambda \pm 1, \Sigma' | \vec{L} \cdot \vec{S} | N_f, N_z, \Lambda, \Sigma \rangle = \\ = \frac{1}{2} [(N_f \mp \Lambda) \cdot (N_z + 1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N_f + 1, N_z - 1, \Lambda \pm 1, \Sigma' | \vec{L} \cdot \vec{S} | N_f, N_z, \Lambda, \Sigma \rangle = \\ = \frac{1}{2} [(N_f \pm \Lambda + 2) \cdot N_z]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\langle N_f, N_z, \Lambda, \Sigma | \vec{L} \cdot \vec{S} | N_f, N_z, \Lambda, \Sigma \rangle = \Lambda \cdot \Sigma$$

Alle anderen Matrixelemente, die hier nicht aufgeführt sind, verschwinden. Insbesondere gilt, daß diese Terme die Quantenzahlen

$$N = N_f + N_z, \quad \Omega = \Lambda + \Sigma$$

erhalten. Der Operatorteil H' mischt nun Ω , erhält aber weiterhin N . Die zu seiner Diagonalisierung nötige Basis hat dann stets die Dimension:

$$\frac{1}{2} (N+1) \cdot (N+2)$$

Benutzt man den Virialsatz, so folgt unmittelbar für das Matrixelement von H' :

$$\langle N'\alpha' | H' | N\alpha \rangle = \delta_{NN'} \hbar \omega_c \int d \langle N\alpha' | x^2 - y^2 | N\alpha \rangle \quad (\text{A.8})$$

Nach Transformation des Ausdrucks $x^2 - y^2$ auf Zylinderkoordinaten folgt dann:

$$\begin{aligned} \langle N_f', N_z', \Lambda' | H' | N_f, N_z, \Lambda \rangle = \delta_{N_z, N_z'} \cdot \delta_{N_f, N_f'} \cdot \left(-\frac{1}{2} \hbar \omega_c\right) \times \\ \times \left\{ \delta_{\Lambda', \Lambda+2} [(N_f - \Lambda)(N_f + \Lambda + 2)]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \delta_{\Lambda', \Lambda-2} [(N_f - \Lambda + 2)(N_f + \Lambda)]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Die Wahl der Basis (A.6) hat gegenüber der üblicherweise benutzten sphärischen Basis in Polarkoordinaten zwei entscheidende Vorteile: Erstens ist der vollständige axial-symmetrische Teil des Hamiltonoperators (A.1) einschließlich der l -abhängigen Terme diagonal in N und zweitens führt die Basis (A.6) auf die sehr einfachen Matrixelemente (A.7) und (A.8), die keine Berechnung von Clebsch-Gordan-Koeffizienten benötigen. Daher arbeitet die Diagonalisierung des Hamiltonoperators (A.5) ca. 10 mal schneller als die übliche in einer Basis in Polarkoordinaten. Für die Berechnung von ca. 3000 Einteilchenenergien im axialsymmetrischen Fall werden auf der IBM 7094 etwa 2 min benötigt, während für $\alpha_1 \neq 0$ die Berechnung der gleichen Anzahl ca. 10 min dauert.

Anhang 2 Lösung der BCS - Gleichung

Der BCS Grundzustand wird angesetzt als:

$$|BCS\rangle = \prod_v (u_v + v_v a_v^\dagger a_{-v}^\dagger) |0\rangle \quad (B.1)$$

Die Forderung nach Normierung führt auf:

$$u_v^2 + v_v^2 = 1$$

während die Minimalisierung der Grundzustandsenergie für den Hamiltonoperator:

$$H = \sum_k \epsilon_k (a_k^\dagger a_k + a_{-k}^\dagger a_{-k}) - G \sum_{k,k'} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger a_{k'} a_{-k'} \quad (B.2)$$

unter der Nebenbedingung

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = n \quad (B.3)$$

mit $\hat{N}$ als Operator der Teilchenzahl auf die Gleichungen:

$$n - 2 \sum_v v_v^2 = 0 \quad (B.4)$$

$$\frac{2}{G} - \sum_v \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} = 0 \quad (B.5)$$

führt, mit:

$$v_v^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_v - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (B.6)$$

und der Gesamtenergie

$$E = 2 \sum_{v=1}^N \epsilon_v v_v^2 - \frac{\Delta^2}{G} - G \sum_{v=1}^N v_v^4 \quad (B.7)$$

wobei N die Dimension der benutzten Basis angibt.

Der letzte Term in der Energie wird im Folgenden wie üblich vernachlässigt; er stellt lediglich eine Korrektur an den Einteilchenenergien ϵ_v dar, die über den Hamiltonoperator indirekt sowieso am Experiment angepaßt werden. Der Ausdruck für die Energie (B7) kann nun mittels der Gleichungen (B.4), (B.5) und (B.6) umgeformt werden in:

$$E = \sum_{v=1}^N \epsilon_v - \sum_{v=1}^N \sqrt{(\epsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta^2}{G} + \lambda(n - N) \quad (\text{B.8})$$

n : Anzahl der Teilchen

N : Anzahl der berücksichtigten Zustände, jeder entsprechend der $|\Omega\rangle$ -Entartung mit 2 Teilchen besetzt.

Wählt man nun N so, daß genau so viele besetzte wie unbesetzte Zustände in der Basis enthalten sind, d.h.

$$N = n$$

so verschwindet der letzte Summand in (B.8).

Im Folgenden wird nun die Energie E als Funktion von λ und Δ untersucht. Es gilt:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \sum_{v=1}^N (1 - 2\vartheta_v^2) \quad (\text{B.9})$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta} = - \sum_{v=1}^N \frac{\Delta}{\sqrt{(\epsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} + \frac{2\Delta}{G}$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß E an den Lösungen λ_0, Δ_0 der beiden Gleichungen (B.4) und B.5) stationär ist, denn:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 2 \cdot \sum_{v=1}^N \vartheta_v^2 = N = n \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta} = 0 \rightarrow \frac{2}{G} = \sum_{v=1}^N \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}}$$

wenn man die triviale Lösung $\Delta = 0$ ausscheidet. Zur Berechnung des Einflusses der Paarkorrelationen auf die Grundzustandsenergie wird deshalb das Gleichungssystem (B.4) und B.5) iterativ gelöst, wobei nicht die Variation der λ und Δ Werte, sondern vielmehr direkt die Konstanz der Grundzustandsenergie (B.8) als Konvergenzkriterium benutzt wird.

Die Nullstellen der beiden Gleichungen (B.4) und (B.5) werden iterativ nach der 2-dimensionalen Newton-Methode gesucht:

$$f(\lambda, \Delta) = \sum_{v=1}^N \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v} = 0$$

$$g(\lambda, \Delta) = \frac{2}{G} - \sum_{v=1}^N \frac{1}{E_v} = 0 \quad (\text{B.11})$$

mit $E_v = \sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}$

Diese Gleichungen (B.11) werden nun linearisiert:

$$f(\lambda, \Delta) = f(\lambda_0, \Delta_0) + (\lambda - \lambda_0) \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_0 + (\Delta - \Delta_0) \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta} \right|_0 = 0$$

$$g(\lambda, \Delta) = g(\lambda_0, \Delta_0) + (\lambda - \lambda_0) \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right|_0 + (\Delta - \Delta_0) \left. \frac{\partial g}{\partial \Delta} \right|_0 = 0 \quad (\text{B.12})$$

wobei λ_0, Δ_0 Anfangswerte der Iteration darstellen.

λ_0 kann als Energie des letzten besetzten Zustandes angesetzt werden, während ein Wert für Δ_0 direkt aus den experimentellen u_g -Massendifferenzen folgt. Für die in (B.12) eingehenden Größen gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -\Delta^2 \cdot \sum_v \frac{1}{E_v^3} \quad \frac{\partial f}{\partial \Delta} = -\Delta \sum_v \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = - \sum_v \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v^3} \quad \frac{\partial g}{\partial \Delta} = \Delta \cdot \sum_v \frac{1}{E_v^3} \quad (\text{B.13})$$

Damit kann das Gleichungssystem (B.11) leicht durch Iteration der Gleichung (B.12) gelöst werden. Es genügen i.A. 4 - 5 Iterationen, um eine Konstanz der Grundzustandsenergie auf 10^{-4} MeV zu erzielen.

Für den Fall, daß der Einfluß der Paarwechselwirkungen auf eine Anzahl von Zuständen an der Fermikante beschränkt wird, muß angesetzt werden:

$$\psi_v^z = \begin{cases} 1 & v = 1, \dots, K \\ 0 & v = N+1, N+2, \dots \end{cases} \quad 2K < N \quad (\text{B.14})$$

Wählt man dann wieder die berücksichtigten Teilchenzustände symmetrisch zur Fermikante, also:

$$K = n - N$$

so ist in den Gleichungen (B.11) und (B.13) lediglich in allen Summationen die untere Summationsgrenze durch $k+1$ zu ersetzen, während die Grundzustandsenergie (B.8) nun lautet:

$$E = 2 \cdot \sum_{v=1}^K \varepsilon_v + \sum_{v=K+1}^N \varepsilon_v - \sum_{v=K+1}^N \sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta^2}{G} \quad (\text{B.15})$$

Literaturverzeichnis:

- 1.) Bohr, A.: Dan. Mat. Fys. Medd. 26, No. 14 (1952)
Bohr, A., und B.R. Mottelson: Dan. Mat. Fys. Medd. 27, No 16 (1953)
- 2.) Faessler, A., u. W. Greiner: Z. Physik 168, 425 (1962);
170, 105 (1962); 177, 190 (1964)
Faessler, A., W. Greiner, und R.K. Sheline:
Nuclear Phys. 70, 33 (1965)
- 3.) Kumar, K., und M. Baranger: Nuclear Phys. A92, 608 (1967)
- 4.) Belyaev, S.T.: Dan. Mat Fys. Medd. 31, No. 11 (1959)
- 5.) Moszkowski, S.A.: Phys. Letters 6, 237 (1963)
- 6.) Eisenberg, J.M. und W. Greiner: Nuclear models.
Amsterdam: North Holland Publ. Company (zur Veröffentlichung eingereicht)
- 7.) Krickser, W.: Diplomarbeit, Univ. Frankfurt a.M. (1968)
- 8.) Bethe, H.A., und R. Bacher: Rev. Mod. Phys. 8, 82 (1936)
- 9.) Nilsson, S.G., u. O. Prior: Dan. Mat. Fys. Medd. 32, No 9 (1960)
- 10.) Grodzins, L.: Phys. Letters 2, 88 (1966)
- 11.) Seeger, P.A., und R.C. Perisho: L A 3751, Los Alamos (1967)
- 12.) Stepien, S., und Z. Szymanski: Phys. Letters 26B, 181 (1968)
- 13.) Carlson, B.C.: J. Math. Phys. 2, 441 (1961)
- 14.) Davidson, J.P.: Rev. Mod. Phys. 37, 105 (1965)
- 15.) Harmatz, B., und T.H. Handley: Nuclear Phys. 81, 481 (1966)
- 16.) Burke, D.G., und B. Elbek: Dan. Mat. Fys. Medd. 36, 6 (1967)
- 17.) Graetzer, R. et al.: Nuclear Phys. 76, 1 (1966)
- 18.) Nathan, O., und S.G. Nilsson: In: Alpha-, Beta- and
Gamma - Ray - Spectroscopy, (Hrsg. K. Siegbahn), Amsterdam 1966

- 19.) Das Gupta, S., und M.A. Preston: Nuclear Phys. 49, 401 (1963)
Greiner, W.: Z. Physik 172, 386 (1963)
- 20.) Gneuß, G., Univ. Frankfurt a. M., priv. Mitteilung
- 21.) Strutinsky, V.M.: Nuclear Physics A95, 420 (1967);
IAE - Report 1350, Moskau 1967
- 22.) Gustafson, C. et al.: Arkiv Fysik 36, 613 (1967)
- 23.) Seeger, P.A.: siehe Ref. 11
Marmier, P.: Kernphysik I, Zürich 1963
- 24.) Nilsson, S.G.: UCRL - 18355, Berkely 1968
- 25.) Rasmussen, J.O.: In: Alpha-, Beta- and Gamma-Ray-Spectroscopy,
(Hrsg. K. Siegbahn), Amsterdam 1966
- 26.) Taagepera, R., und M. Nurmi: Ann. Acad. Sci.
Fennicae, Ser. A. VI, Nr. 78, 1 (1961)
- 27.) Nilsson, S.G., et. al.: Nuclear Physics A115, 545 (1968)
- 28.) Nilsson, S.G.: Dan. Mat. Fys. Medd. 29, No.16 (1955)
- 29.) Baranger, M., und K. Kumar: Nuclear Phys. A110, 529 (1968)

Tabelle 1 : In dieser Tabelle sind die Grundzustandsdeformation β_0 , die beiden Krümmungen C_0 und C_2 und die Energien der ersten 2^+ Zustände und β -Vibrations-Bandenköpfe für Vibrations- bzw. Rotationskerne aufgelistet. Alle Krümmungen sind stets am axialsymmetrischen prolaten Minimum bestimmt worden. Die Kerne mit $C_2 < 0$ sind entweder asymmetrisch deformiert oder oblat. In diesen Fällen sind die Deformationen β_0 als negative Werte gegeben, wenn das Minimum der PES näher an der oblaten als an der prolaten Gestalt liegt. In den Größen $E_{\alpha\lambda}$ sind die Terme dritter und höherer Ordnung in (23) in einer Störungsrechnung erster Ordnung berücksichtigt worden. Die Energien der α_1 -Vibrationen sind nicht tabelliert worden, da sie aus den diskutierten Gründen nicht mit den experimentellen Energien E_x verglichen werden können.

Tabelle 2 : Für eine Reihe von Kernen mit $Z \geq 110$ sind Steifheiten, Vibrationsenergien, Höhe der Spaltbarriere und Halbwertszeiten für die spontane Spaltung angegeben. Außerdem sind für Kerne mit $A \approx 300$ die Q-Werte des α -Zerfalls (aus Ref. 11) und die Halbwertszeiten gegenüber α -Zerfall aufgelistet. Die Werte in der linken Tabellenhälfte sind mit dem aus (29b) folgenden B-Wert, die in der rechten Hälfte mit dem B-Wert (55) berechnet worden. Außerdem ist die Abhängigkeit aller Größen von den benutzten Kernparametern dargestellt, die durch Parametersatz A bzw. B gekennzeichnet sind (s. Kap. VIIa). Alle Halbwertszeiten sind in Jahren angegeben.

Tabelle 1

Kern	Z	N	β_o	MeV E _{def}	MeV C _o	MeV C ₂	MeV E _{vib}
Nd	60	84	0.0	0.0	148		0.698
		86	0.0	0.0	79		0.506
		88	0.0	0.0	21		0.296
		90	0.232	0.71	110	63	0.698
Sm	62	84	0.0	0.0	126		0.630
		86	0.0	0.0	57		0.422
		88	0.187	0.12	43		0.340
		90	0.263	1.32	138	70	0.745
		92	0.290	2.72	204	108	0.900
Gd	64	88	0.222	0.42	78	57	0.542
		90	0.274	1.73	158	73	0.794
		92	0.295	3.17	222	113	0.969
		94	0.307	4.52	281	151	1.158
		96	0.314	5.70	333	185	1.322
Dy	66	90	0.270	1.81	172	67	0.883
		92	0.292	3.25	237	102	1.045
		94	0.304	4.60	295	138	1.222
		96	0.311	5.77	347	169	1.378
		98	0.315	6.68	392	191	1.469
Er	68	94	0.295	4.25	293	119	1.249
		96	0.303	5.41	341	147	1.379
		98	0.308	6.32	382	167	1.459
		100	0.310	6.87	404	188	1.513
		102	0.310	7.12	408	205	1.498
Yb	70	98	0.298	5.55	356	141	1.372

Kern	Z	N	B ₀	MeV E _{def}	MeV C ₀	MeV C ₂	MeV E _{vib} ^β
		100	0.301	6.09	376	161	1.411
		102	0.300	6.34	383	174	1.378
		104	0.294	6.31	383	168	1.316
		106	0.285	5.93	379	137	1.285
Hf	72	102	0.289	5.31	350	150	1.330
		104	0.283	5.30	356	144	1.286
		106	0.273	4.94	361	115	1.275
		108	0.261	4.50	367	77	1.210
W	74	106	0.261	3.82	319	88	1.213
		108	0.247	3.38	325	53	1.177
		110	0.232	2.72	306	21	1.150
		112	0.213	1.88	260	-8	1.039
Os	76	110	0.215	1.76	244	0.2	1.054
		112	-0.188	1.10	191	-26	0.897
		114	-0.144	0.65	116	-49	0.622
		116	0.0	0.0	32		0.298
Pt	78	108	0.222	1.61	206	2	1.084
		110	0.197	1.06	180	-23	1.089
		112	0.159	0.45	124	-42	0.817
		114	0.0	0.0	44		0.311
		116	0.0	0.0	21		0.304
		118	0.0	0.0	88		0.403

Tabelle 2

Parameter-Satz	Z	N	MeV B/h^2	MeV C_o	MeV E_{vib}	MeV C_f	MeV E_s	K	$10 \log t_{1/2}$	MeV B/h^2	MeV E_{vib}	K	$10 \log t_{1/2}$	MeV Q_α	$10 \log t_{1/2}$
B	110	180	1391	159	0,34	237	3,4	52	-5	695	0,49	36	-12	6,9	+1
B	112	180	1414	229	0,40	240	4,8	74	+4	707	0,58	51	-6	7,5	-1
B	112	184	1459	372	0,50	415	8,3	98	+14	730	0,72	68	+2	7,3	0
B	114	184	1482	452	0,55	426	9,8	114	+21	741	0,80	79	+6	8	-3
A	114	184	1482	532	0,60	392	9,9	121	+24	741	0,85	86	+9	8	-3
B	114	196	1626	453	0,53	380	9,6	126	+26	813	0,76	87	+10	6,4	+5
A	114	196	1626	402	0,50	237	7,4	122	+25	813	0,72	85	+9	6,4	+5
B	116	196	1650	454	0,52	470	9,4	111	+20	825	0,75	77	+6	10,2	-8
B	118	196	1676	439	0,51	460	9,2	111	+20	838	0,74	77	+6	11	-11
A	118	196	1676	258	0,39	289	5,2	78	+6	838	0,56	54	-4	11	-11
B	120	200	1751	239	0,37	260	5,2	86	+10	875	0,53	60	-2		
B	164	268	3528	600	0,41	380	7,8	149	+37	1764	0,57	105	+18		
A	164	268	3528	250	0,27	200	4,0	105	+18	1764	0,38	74	+4		
B	164	272	3604	800	0,47	440	8,8	158	+40	1802	0,66	111	+21		
A	164	272	3604	250	0,26	190	3,8	109	+19	1802	0,37	76	+5		
B	164	276	3682	600	0,40	370	7,4	145	+35	1841	0,57	103	+17		

Parameter- Satz	Z	N	MeV^{-1} $B/\hbar^2$	MeV C_O	MeV E_{vib}	MeV C_f	MeV E_s	K	$10 \log t_{1/2}$	MeV $E/\hbar^2$	MeV E_{vib}	K	$10 \log t_{1/2}$
A	164	276	3682	200	0,23	138	3,8	125	+26	1841	0,33	88	+11
B	164	280	2760	500	0,36	340	6,8	142	+34	1880	0,51	100	+16
B	164	290	3961	600	0,39	218	6,8	186	+53	1980	0,55	132	+29
A	164	290	3961	350	0,30	350	7,0	147	+36	1980	0,42	104	+17
B	164	300	4168	412	0,31	320	6,4	144	+34	2084	0,44	102	+16
B	160	318	4467	222	0,22	93	4,2	188	+54	2234	0,32	130	+29
B	162	318	4511	298	0,26	180	5,6	176	+49	2255	0,37	122	+25
B	164	310	4380	399	0,30	320	6,4	144	+35	2190	0,43	100	+10
B	164	314	4467	392	0,30	261	6,6	173	+47	2234	0,43	120	+24
B	164	318	4555	375	0,29	224	7,0	200	+59	2277	0,42	139	+33
A	164	318	4555	1123	0,50	557	17,4	312	+108	2277	0,79	220	+92
B	164	322	4642	267	0,24	436	4,9	100	+16	2321	0,35	70	+3
B	164	326	4733	162	0,18	285	3,2	80	+8	2366	0,26	56	-3
B	166	318	4596	375	0,28	240	4,8	131	+29	2298	0,40	92	+12
B	168	318	4642	250	0,33	140	2,8	103	+17	2321	0,33	73	+4
B	170	330							$\approx -\infty$				

Abbildungen

Abb. 1 a) Allgemeine Struktur der Potentialkurve $V(\alpha, 0)$ und wichtige mit ihr verknüpfte Größen

b) Schematisches Bild der vollständigen PES mit wesentlichen Größen für den asymmetrischen Fall. Insbesondere ist der Unterschied zwischen C_2 und C_4 wesentlich. Die einzigen Punkte, die mikroskopisch berechnet werden müssen, sind durch kleine Kreise gekennzeichnet.

Abb. 2 Einfluß der Coulomb-Energie auf die Deformationsenergien. Die gestrichelte Kurve ist ohne Coulomb-Energie berechnet worden. Während sie die gleiche Struktur wie die durchgezogene Kurve, die die Coulomb-Wechselwirkung enthält, zeigt, ist sie um ca. 75% energetisch nach oben verschoben. Beide Kurven enthalten den Einfluß der Paarkraft.

Abb. 3 Der unterschiedliche Einfluß der Coulomb-Energie auf die Potential - Energie - Kurven eines deformierten und eines sphärischen Kernes wird gezeigt. In der durchgezogenen Kurve ist die Coulomb-Energie berücksichtigt.

Abb. 4 Krümmungen C_0 mit (durchgezogen) und ohne (gestrichelt) Berücksichtigung der Coulomb - Energie. Durch ein Sternchen gekennzeichnet sind Kerne, die sich ohne Einschluß der Coulomb - Energie als sphärisch ergeben.

Abb. 5 Einfluß der Paarkraft auf die Potential - Energie - Kurven eines sphärischen und eines deformierten Kernes. Gestrichelt: reine Einteilchenrechnung; durchgezogen: Paarkraft berücksichtigt. Beide Kurven enthalten nicht die Coulomb - Energie.

Abb. 6 Einfluß der Paarkraft auf die Krümmungen C_0 . Die durchgezogenen Linien geben die reine Einzelteilchen - Steifheit, während die gestrichelte Kurve den mittleren Verlauf und die ungefähre Größe dieser Krümmungen angibt, wenn die Paarkraft berücksichtigt ist. Die Kurven sind ohne Coulomb - Energie berechnet worden.

Abb. 7 Einfluß der Coulomb - Energie auf die Krümmungen C_1 . a) berechnet mit und b) berechnet ohne Coulomb - Wechselwirkung.

Abb. 8 Grundzustandsdeformationen β_0 . Durchgezogen: experimentelle Werte aus Ref. 14, gestrichelt: Theoretische Werte, die sowohl die Coulomb- als auch die Paarkraft enthalten. Strichpunktiert: Werte aus einer reinen Einteilchenrechnung ohne jede Restwechselwirkungen.

Abb. 9 Kernsteifheiten C_0 , die sowohl den Einfluß der Coulomb- als auch den der Paarkraft enthalten.

Abb. 10 Die Energien der ersten angeregten 2^+ - Zustände in sphärischen und die Energien der β - Bandenköpfe in deformierten Kernen werden mit dem Experiment verglichen.

Abb. 11 Energien der α_1 -Vibrations - Bandenköpfe im Vergleich mit den experimentellen Werten.

Abb. 12 Zentrifugal-Dehnungsfaktoren B_{ze} . Gestrichelt: Experimentelle Werte (Ref. 18). Durchgezogen: Theoretische Werte, die nur den Teil von B_{ze} enthalten, der von den β -Vibrationen herrührt.

Abb. 13, a-c Potential-Energie-Flächen für die S_m -Isotope. Die Energie dieser Flächen ist so normiert, daß $E(\alpha_0 = 0, \alpha_2 = 0) = 0.0$. Die Zahlen an den Kurven geben die Relativenergien in MeV.

Abb. 14, a-d Potential-Energie-Flächen für die Os-Isotope. Die Details dieser Abbildung sind die gleichen wie in Abb. 13

Abb. 15 Einfluß des doppelt-magischen Sn_{132} - Rumpfes auf die PES von W 180.

Getrichelt: Potential-Energie-Kurve des Rumpfes.

Strichpunktiert: Energie der äußeren Teilchen.

Durchgezogen: Summe dieser beiden Teile, die die vollständige PES von W 180 darstellt.

Abb. 16 Extrapolation des Schalenmodells (8) für $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ in die Gebiete: $Z \geq 82$ und $N \geq 126$.

a) für Neutronen

b) für Protonen

Die linke Zustandsfolge ist mit dem Parametersatz A berechnet, die rechte mit Satz B.

Abb. 17 (N,Z) Ebene. Eingezeichnet sind die aus Abb. 16 folgenden magischen Zahlen von Parametersatz A (durchgezogene Linie). Magische Zahlen, die nur in Satz B auftreten, sind gestrichelt gezeichnet. Außerdem ist das Tal der β -stabilen Elemente angegeben. Regionen besonderer Stabilität sind schraffiert.

Abb. 18 Potentialenergiekurven $V(\alpha_0)$ für super-schwere Elemente. Durchgezogene Kurven sind mit Satz A, gestrichelte mit Satz B berechnet. Alle Kurven sind auf $V(0) = 0$ normiert.

Abb. 19 Typische Verdünnungen und Verdichtungen in der Einteilchen-Zustandsdichte (aus Ref. 21) des Schalenmodells.

Abb. 20 Abhängigkeit der Zustandsdichte von der Deformation α_0 für den Kern X^{298} . Aufgetragen ist $V(\alpha_0)$ und $\Delta(\alpha_0)$, das mit $\rho(\alpha_0)$ über Gleichung (44) zusammenhängt.

Abb. 21 Vollständige Potentialenergiefläche für Quadrupoldeformationen $V(\alpha_0, \alpha_2)$ für die beiden doppeltmagischen Kerne X^{148}_{114} und X^{310}_{114} .

Die Flächen sind mit Parametersatz B berechnet.

Abb. 22 Notwendiges qualitatives Verhalten der Äquipotentialflächen eines Einzelteilchen-Schalen-Modells für die Beschreibung der PES vom Grundzustand bis zum Sattelpunkt. In der unteren Bildhälfte ist der Potentialschnitt entlang der z-Achse gezeigt. Der Wall bei $z=0$ verhindert das zu starke Ansteigen der quantenmechanischen Nullpunktsenergie, die mit der sich einschnürenden Achse senkrecht zur Figurenachse verbunden ist.

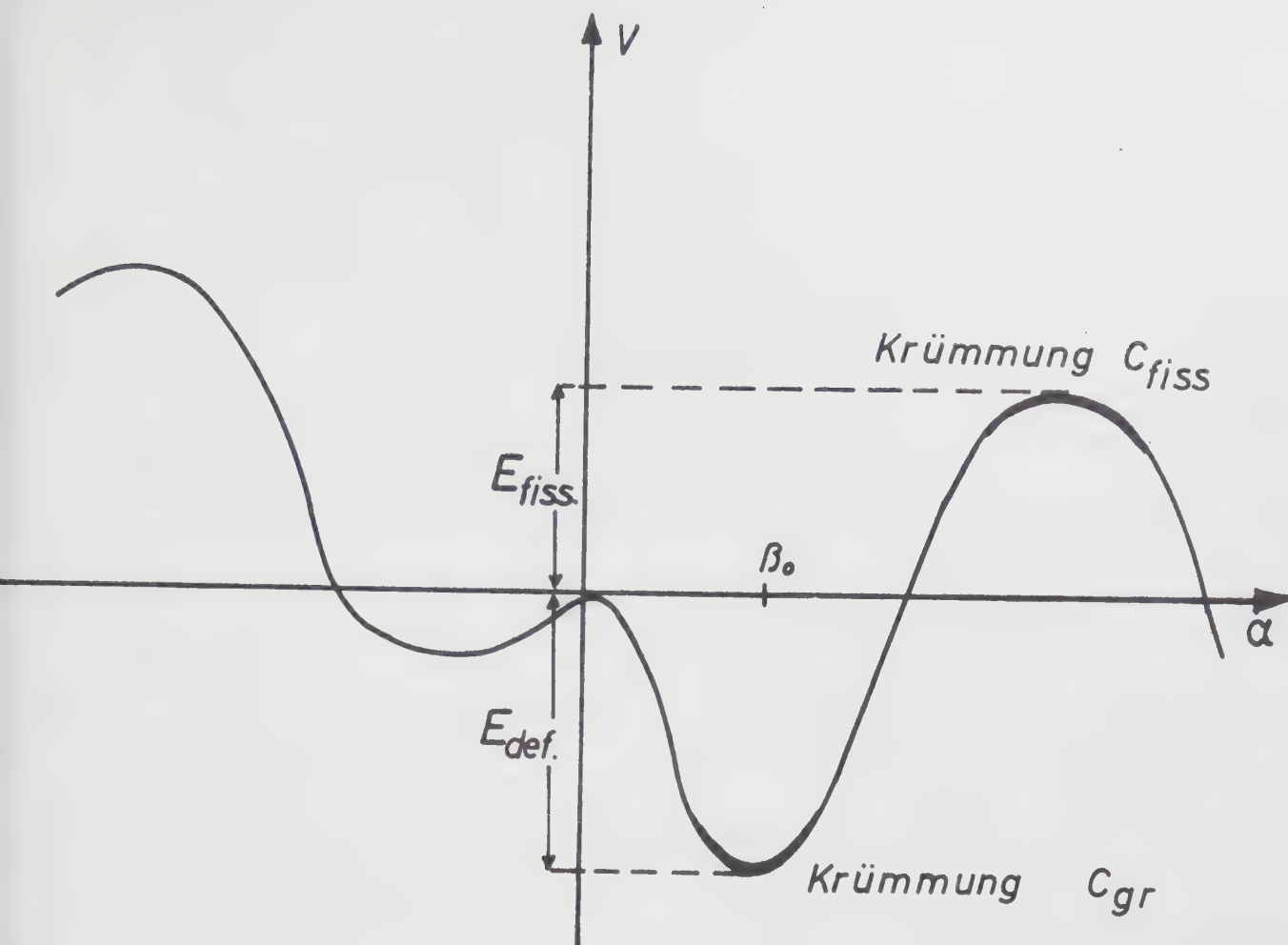


Fig. 1a

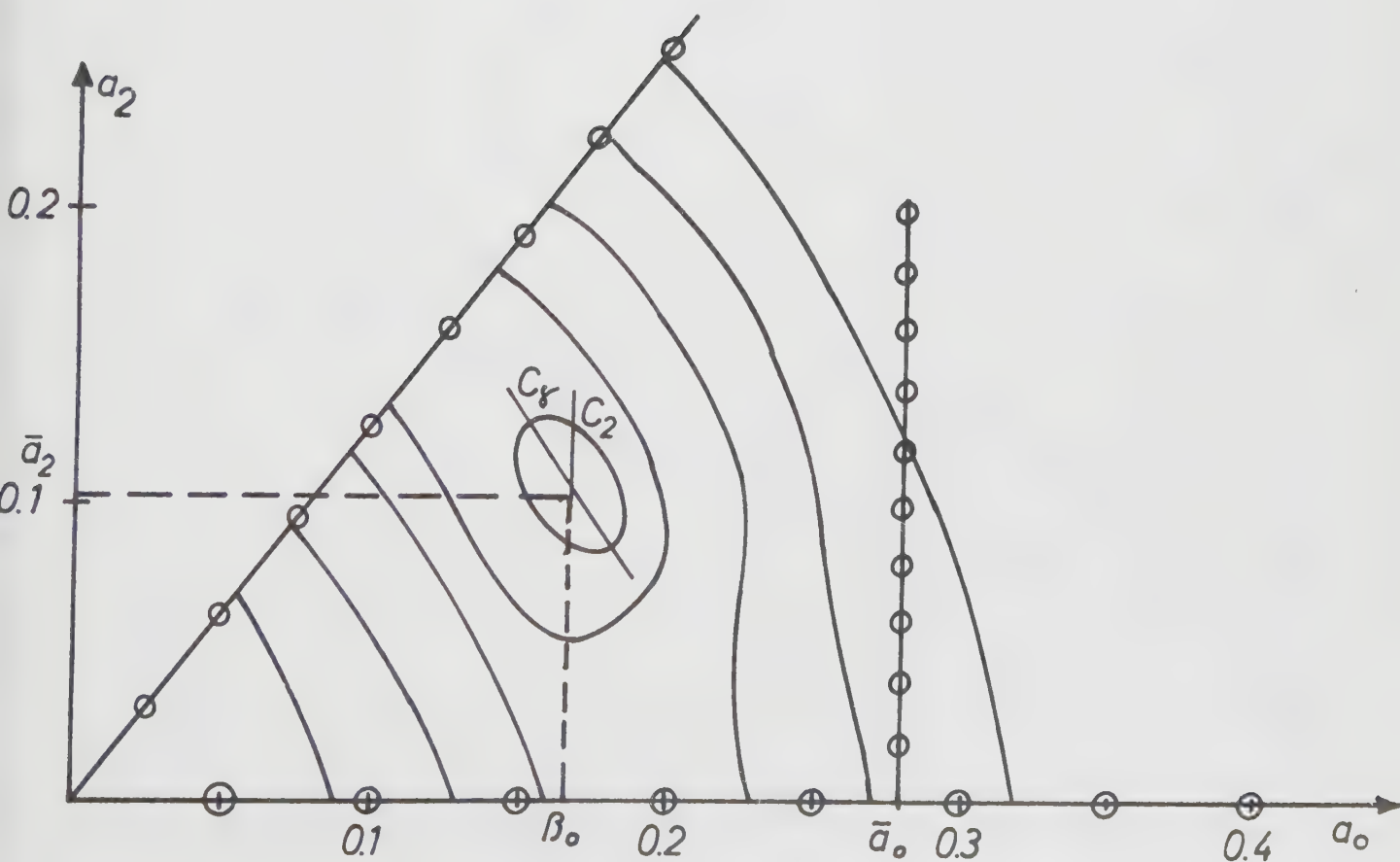


Fig. 1b

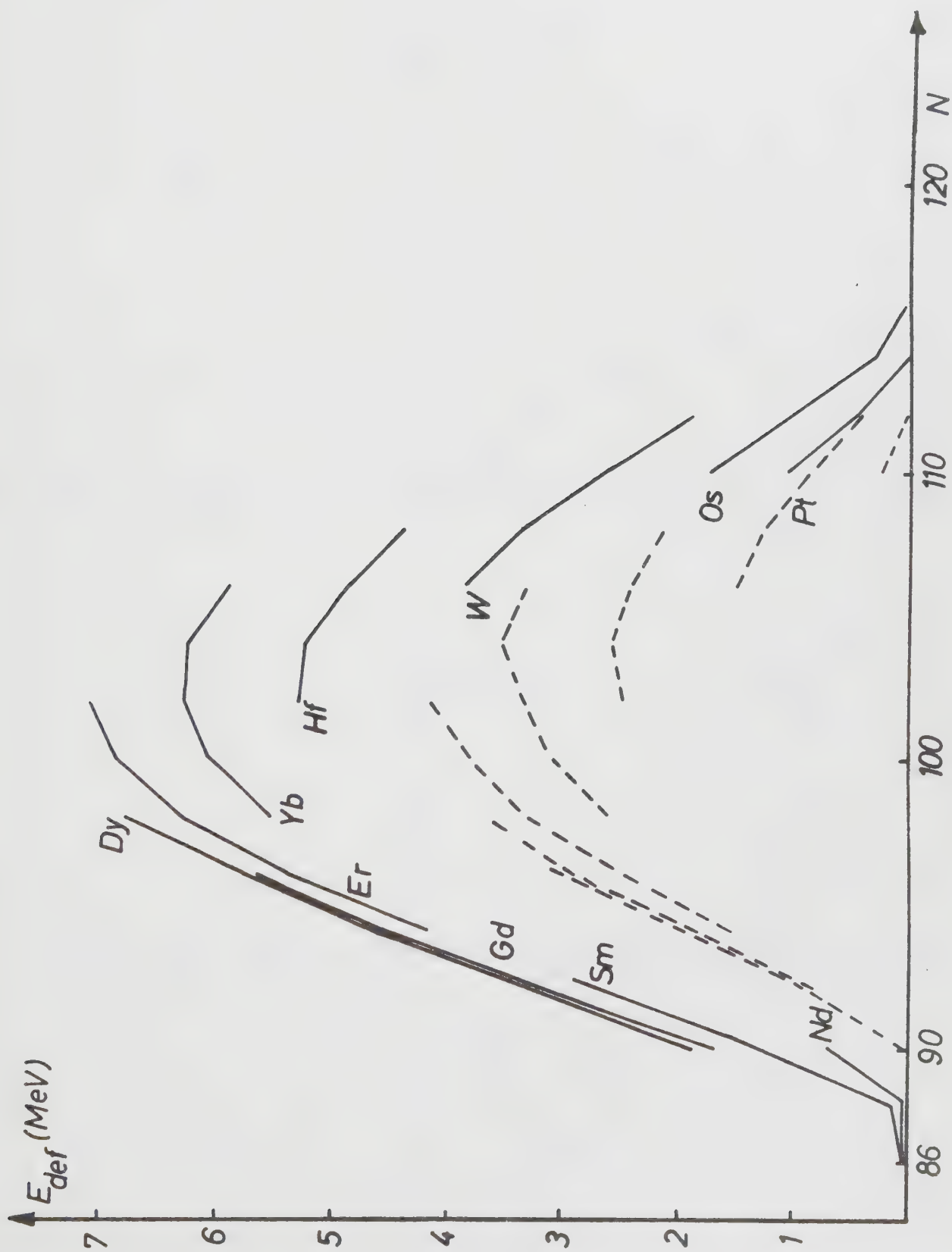


Fig. 2

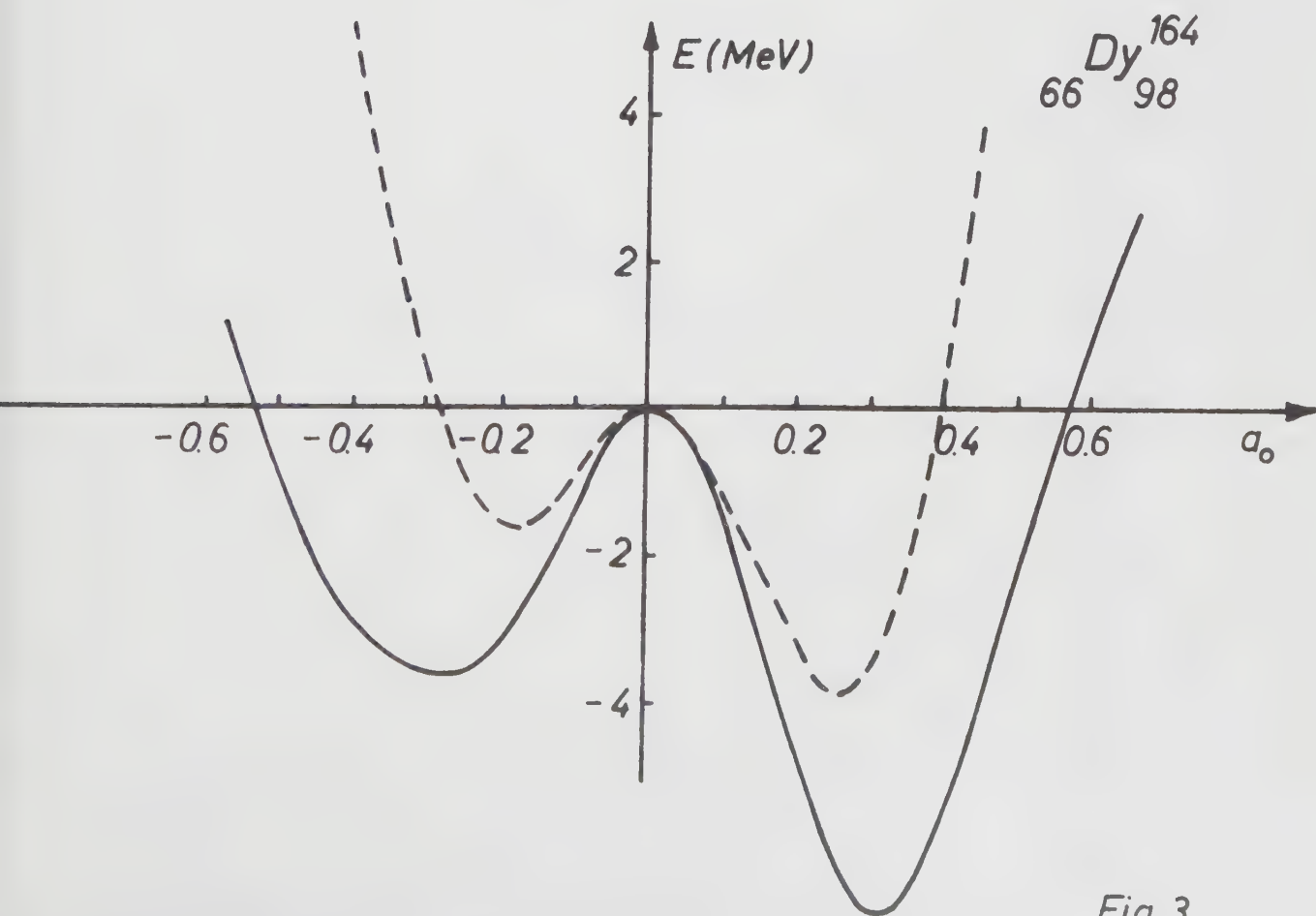
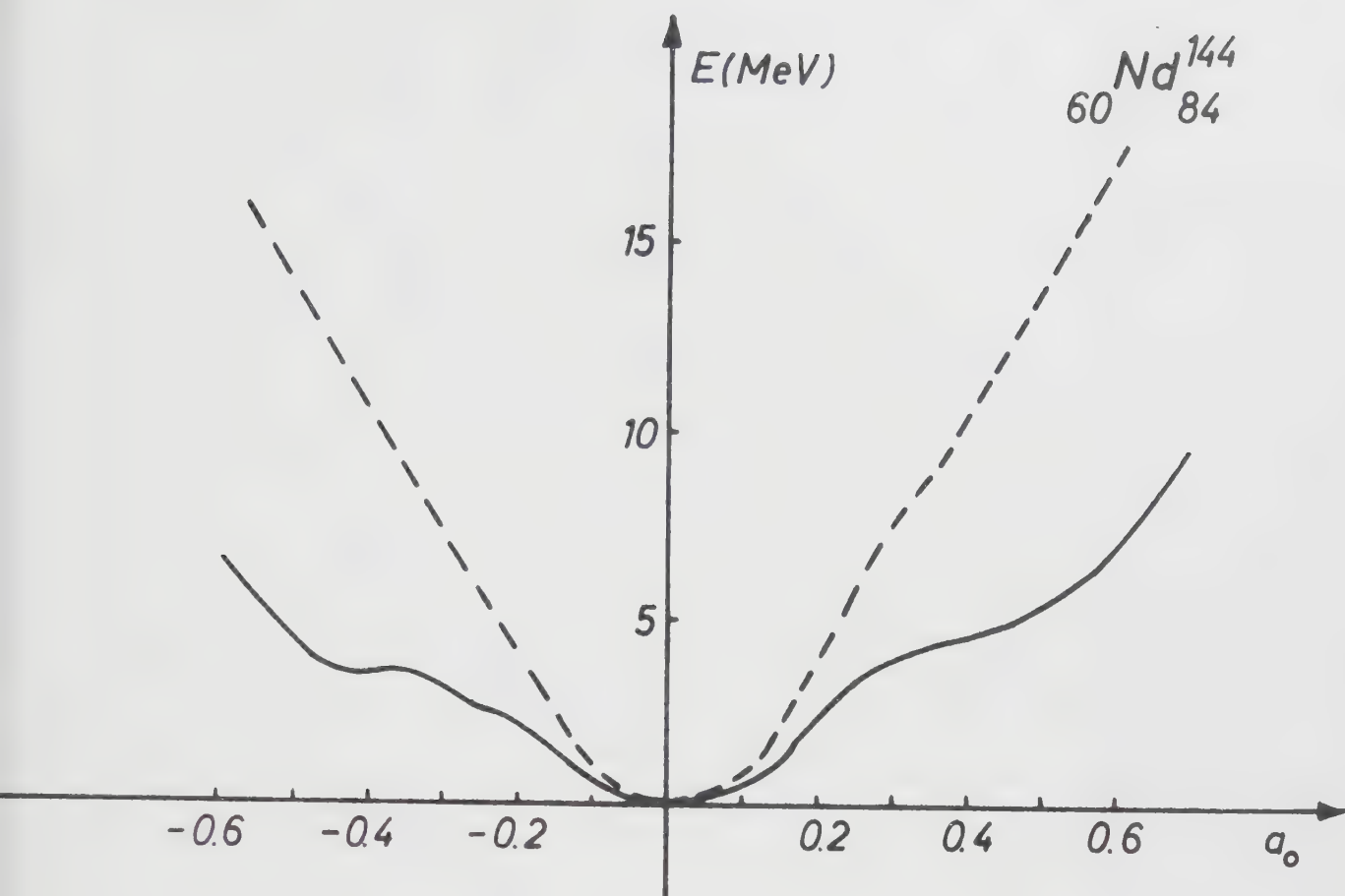


Fig. 3

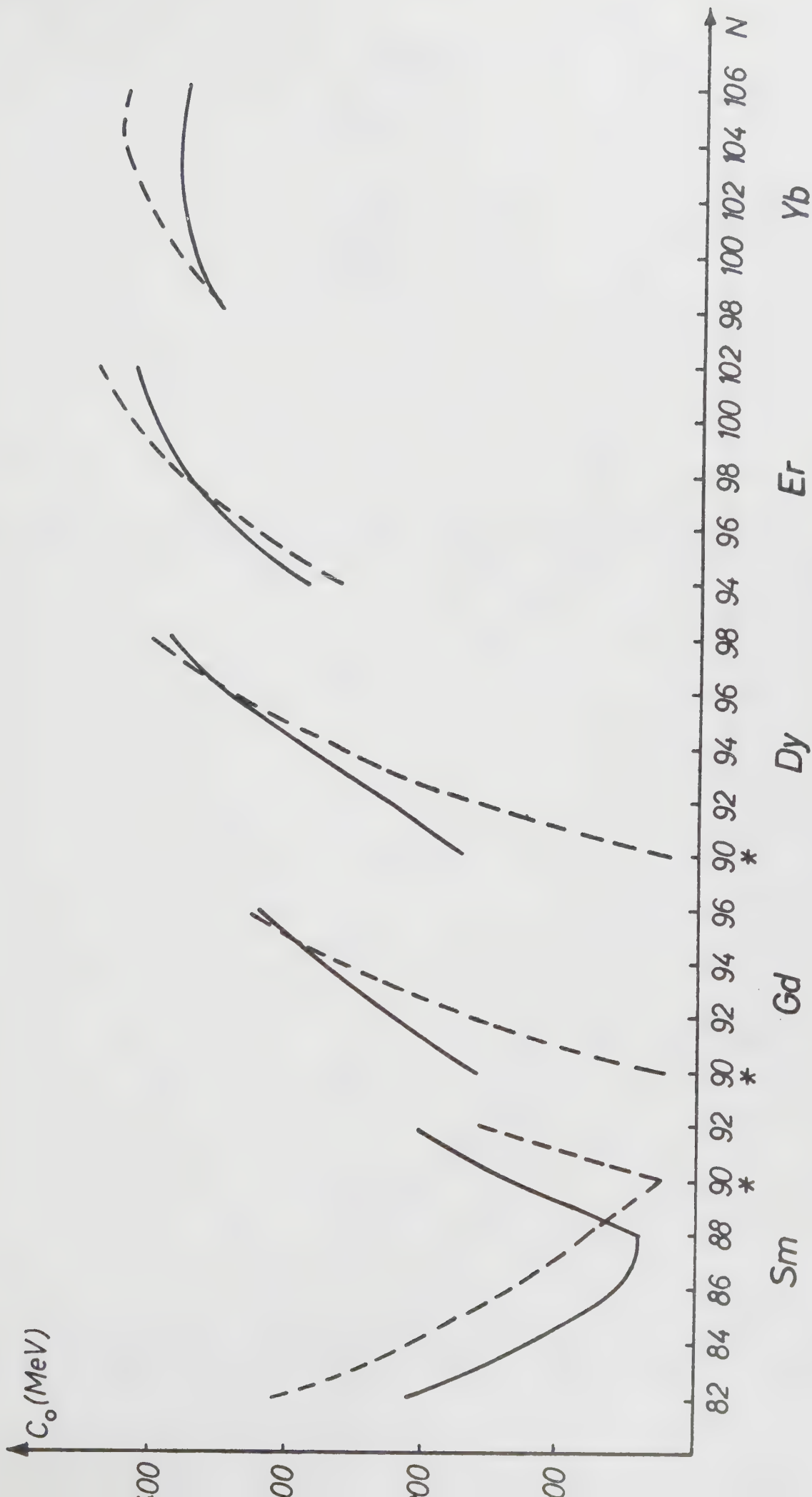


Fig. 4

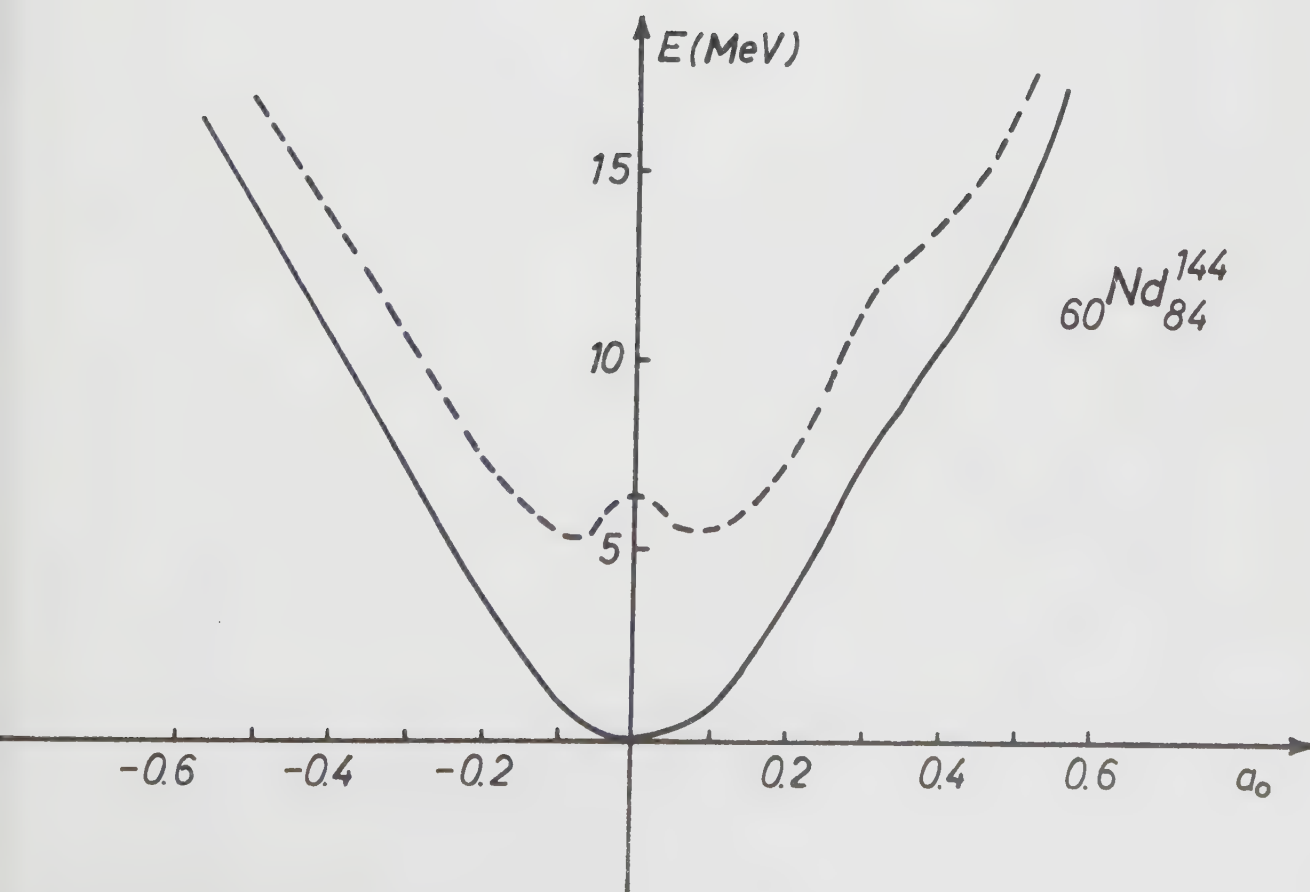
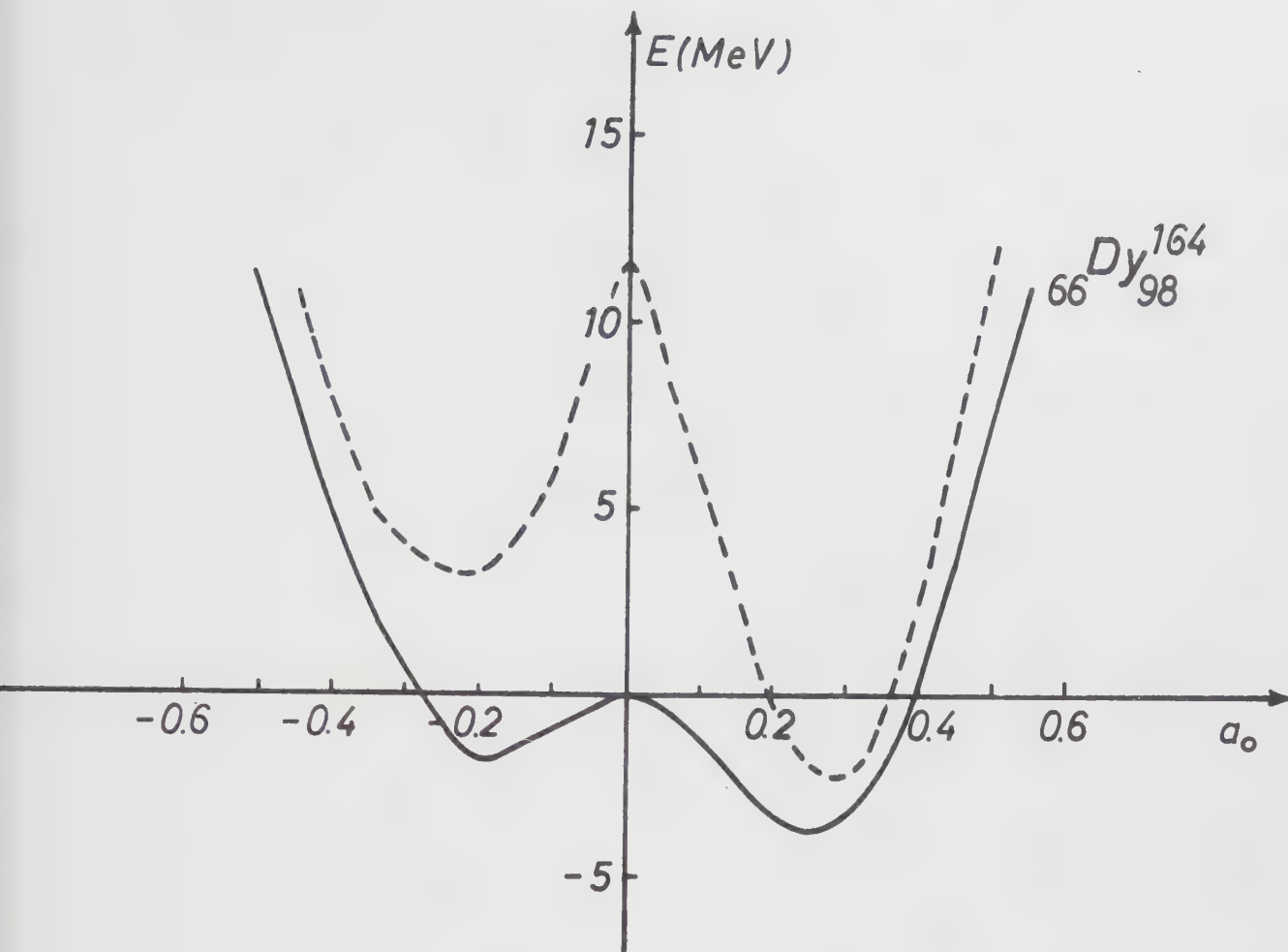


Fig.5

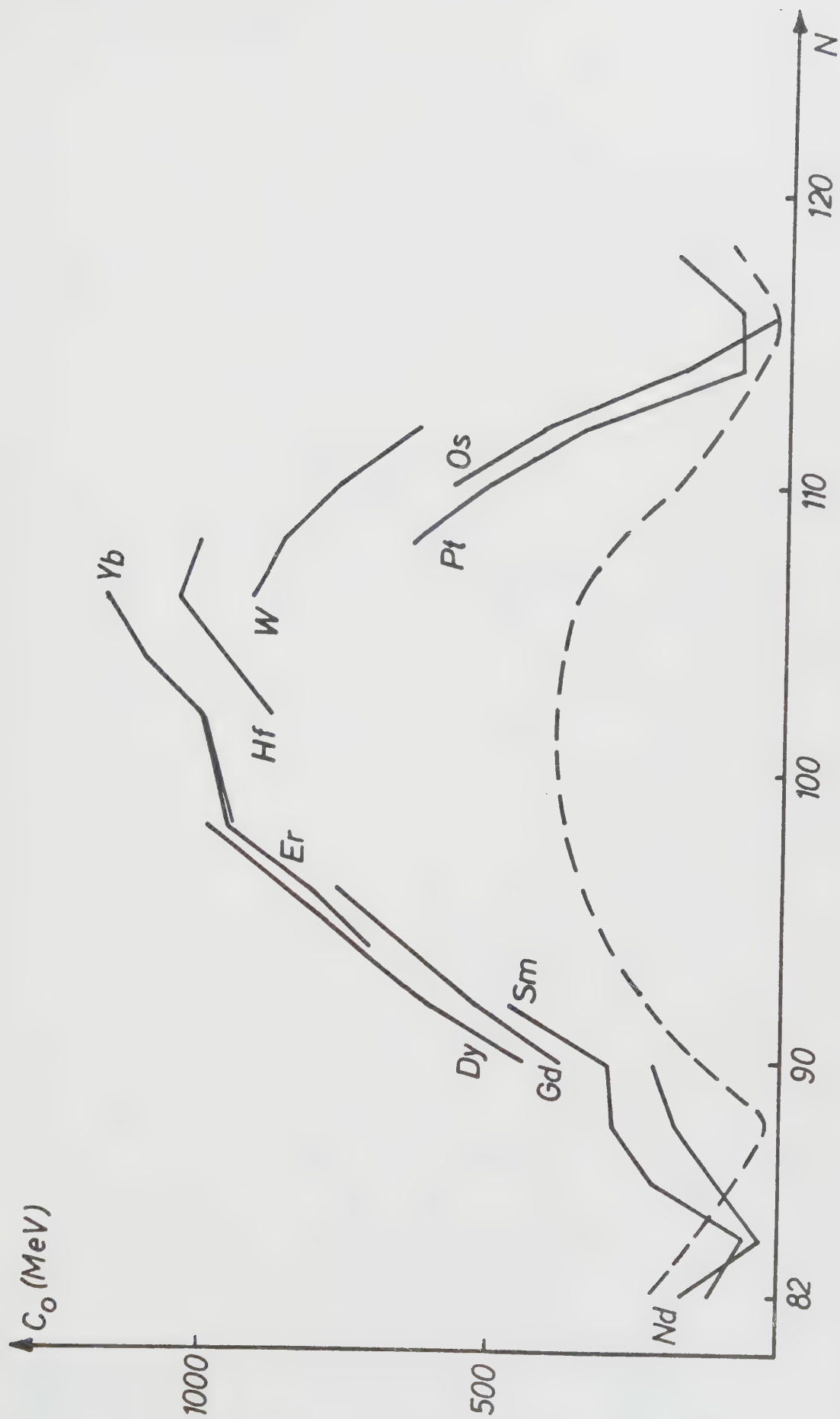


Fig.6

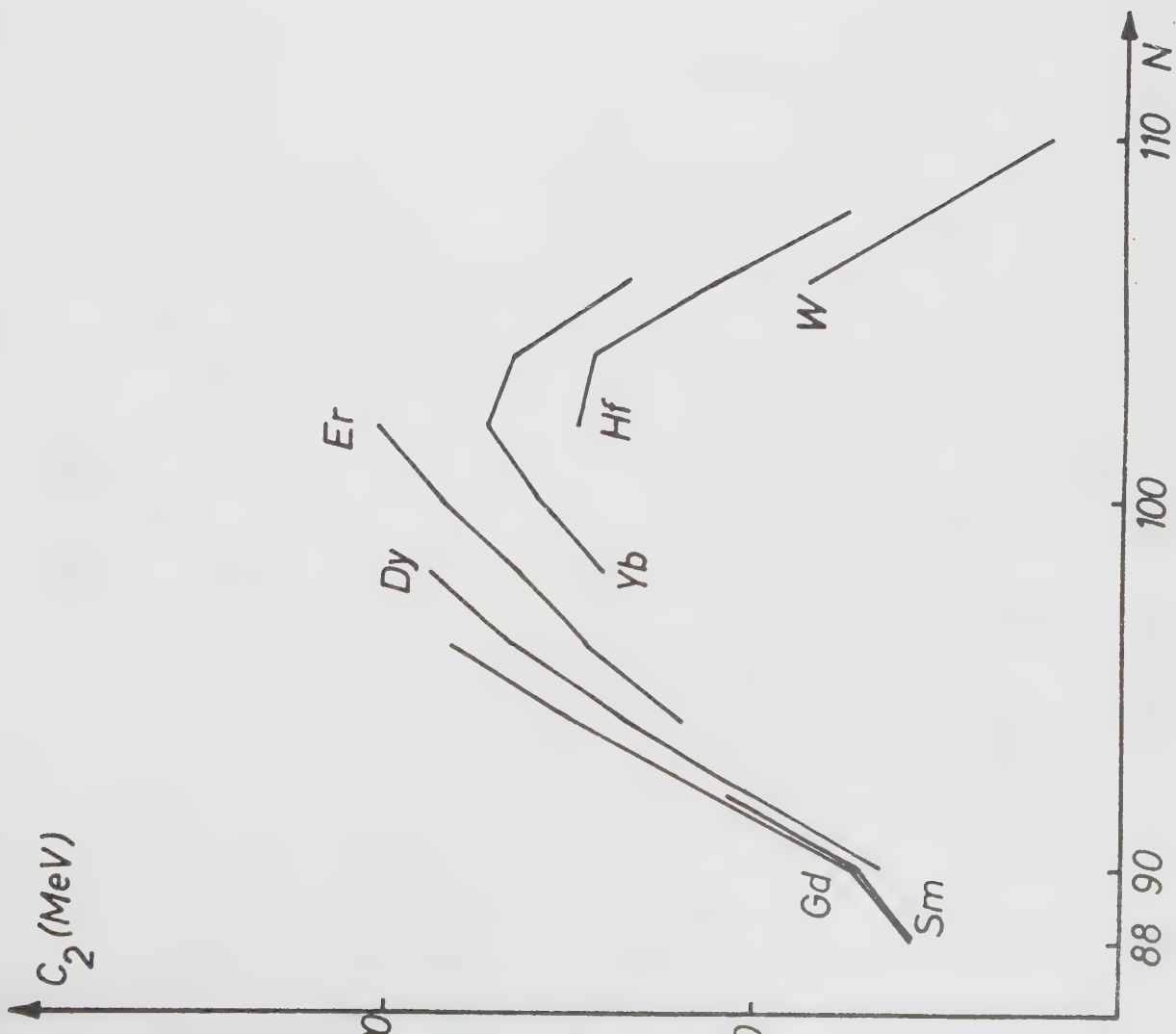


Fig. 7a

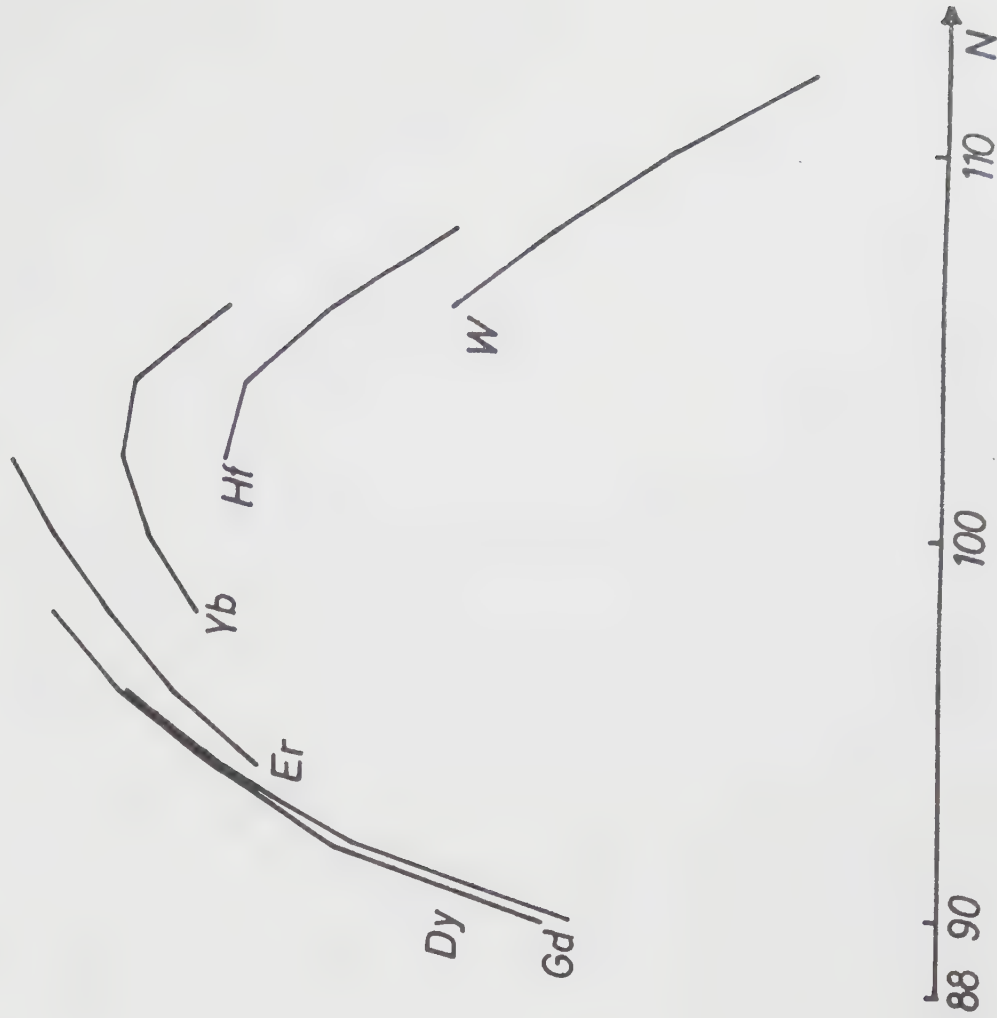


Fig. 7b

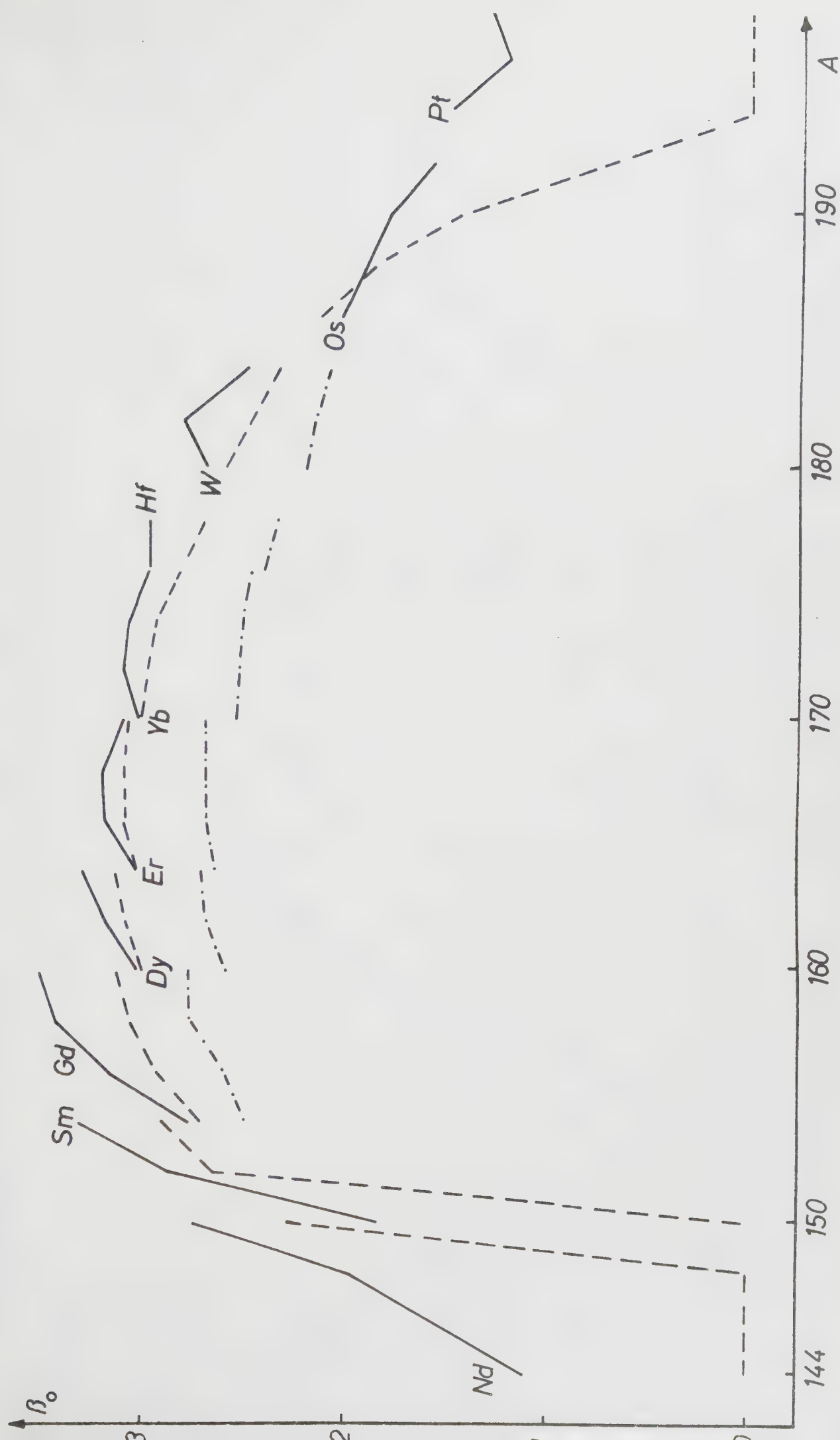


Fig. 8

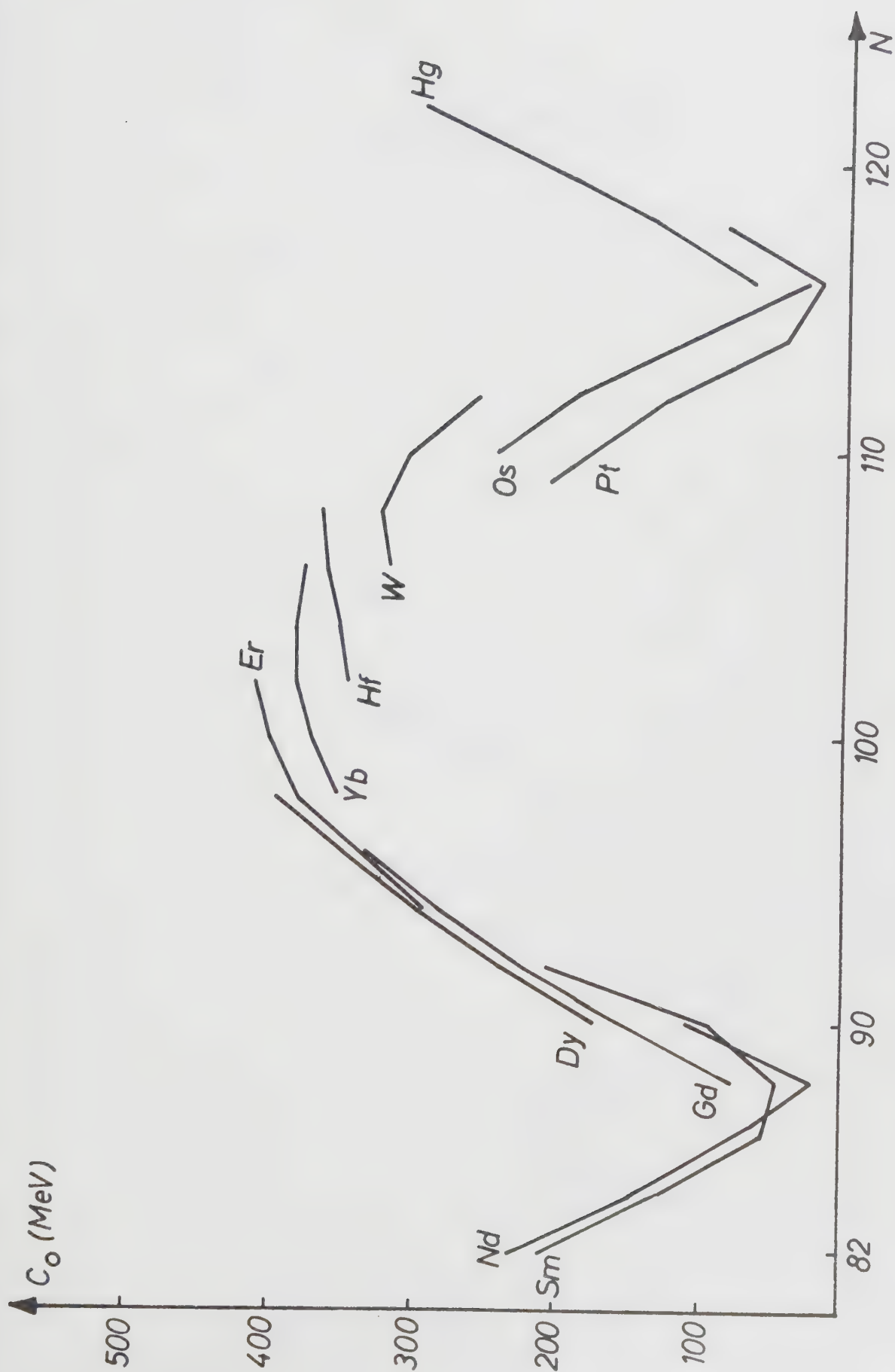
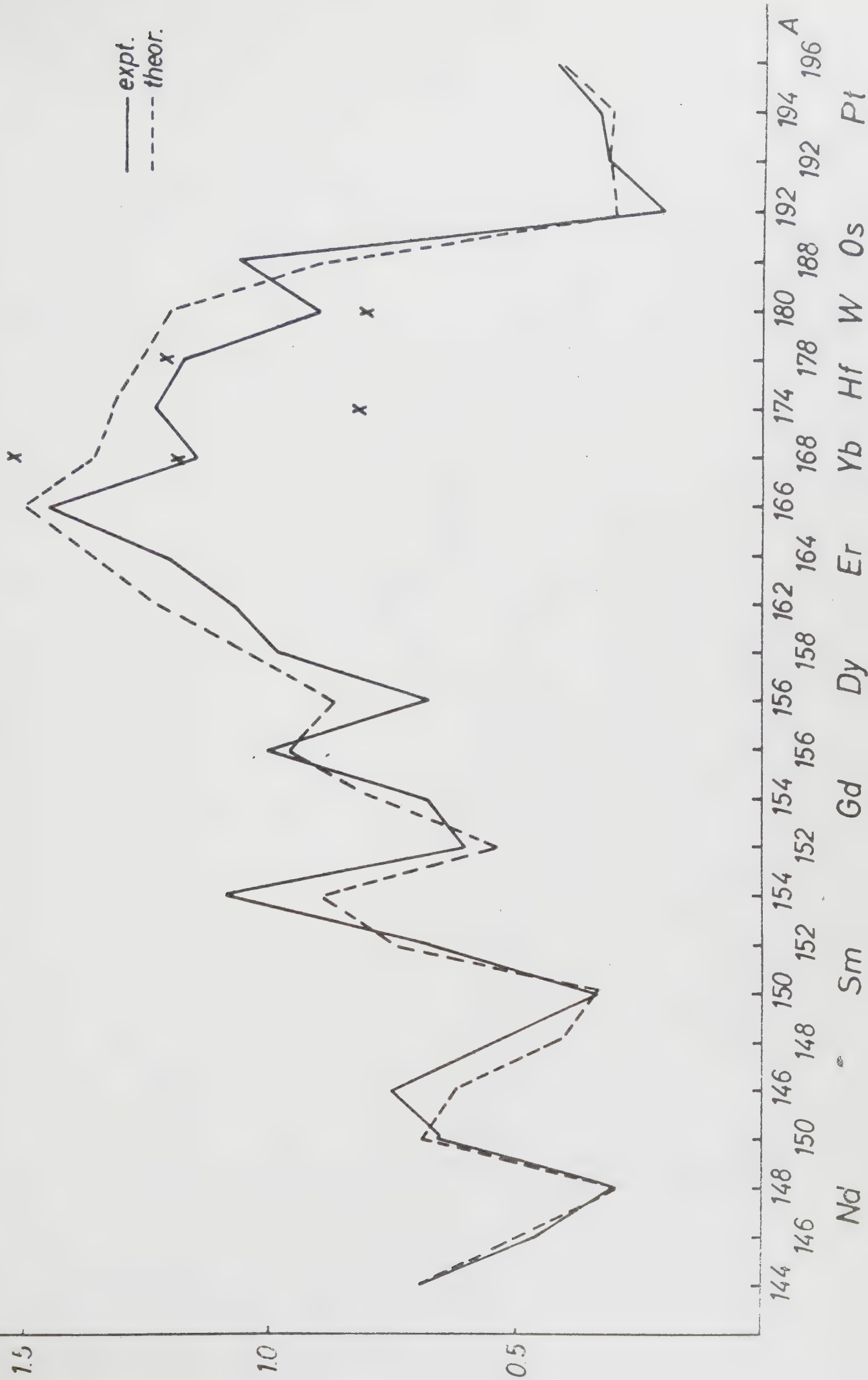


Fig. 9

E_β (MeV)

Fig. 10



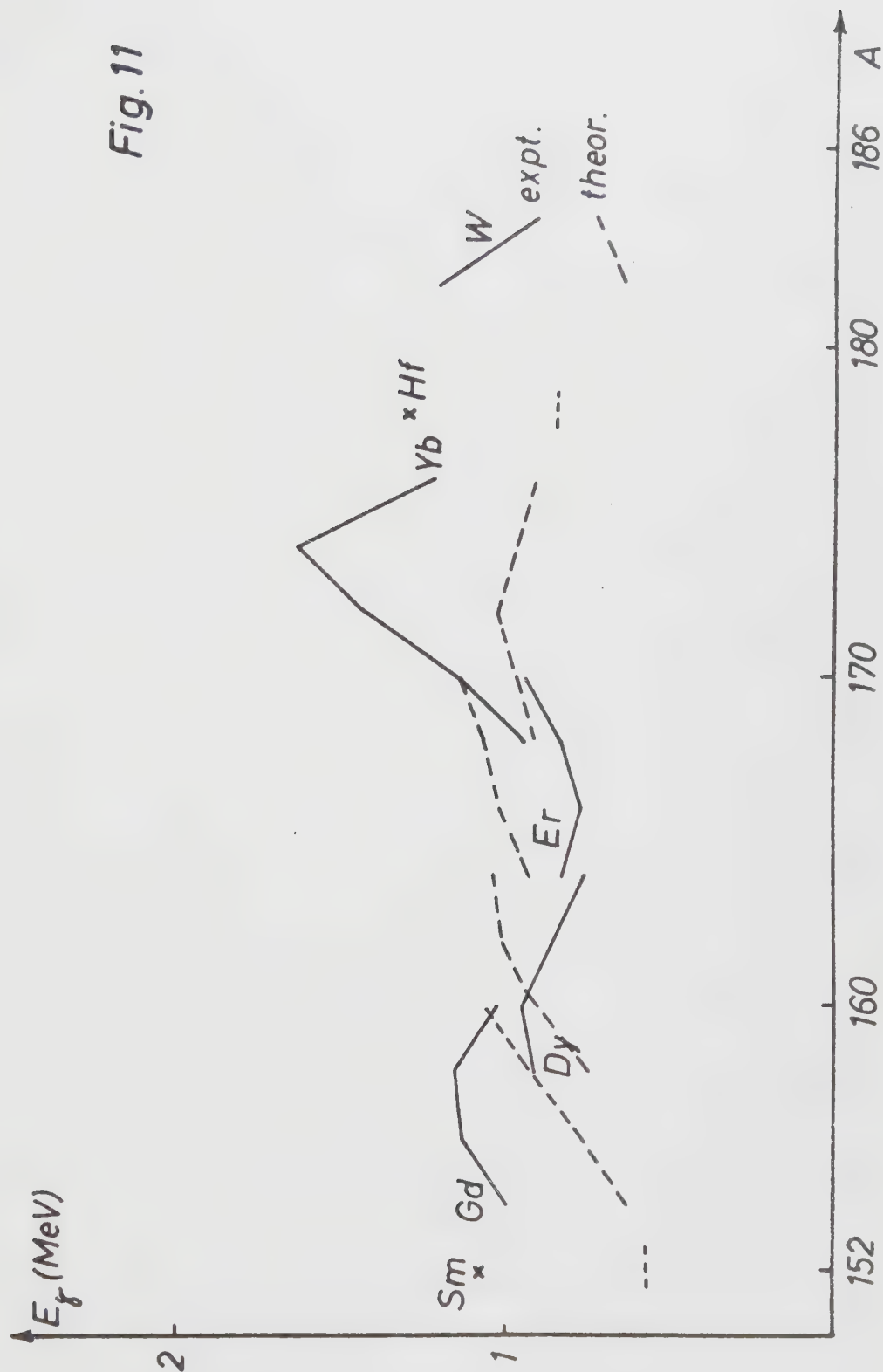


Fig.11

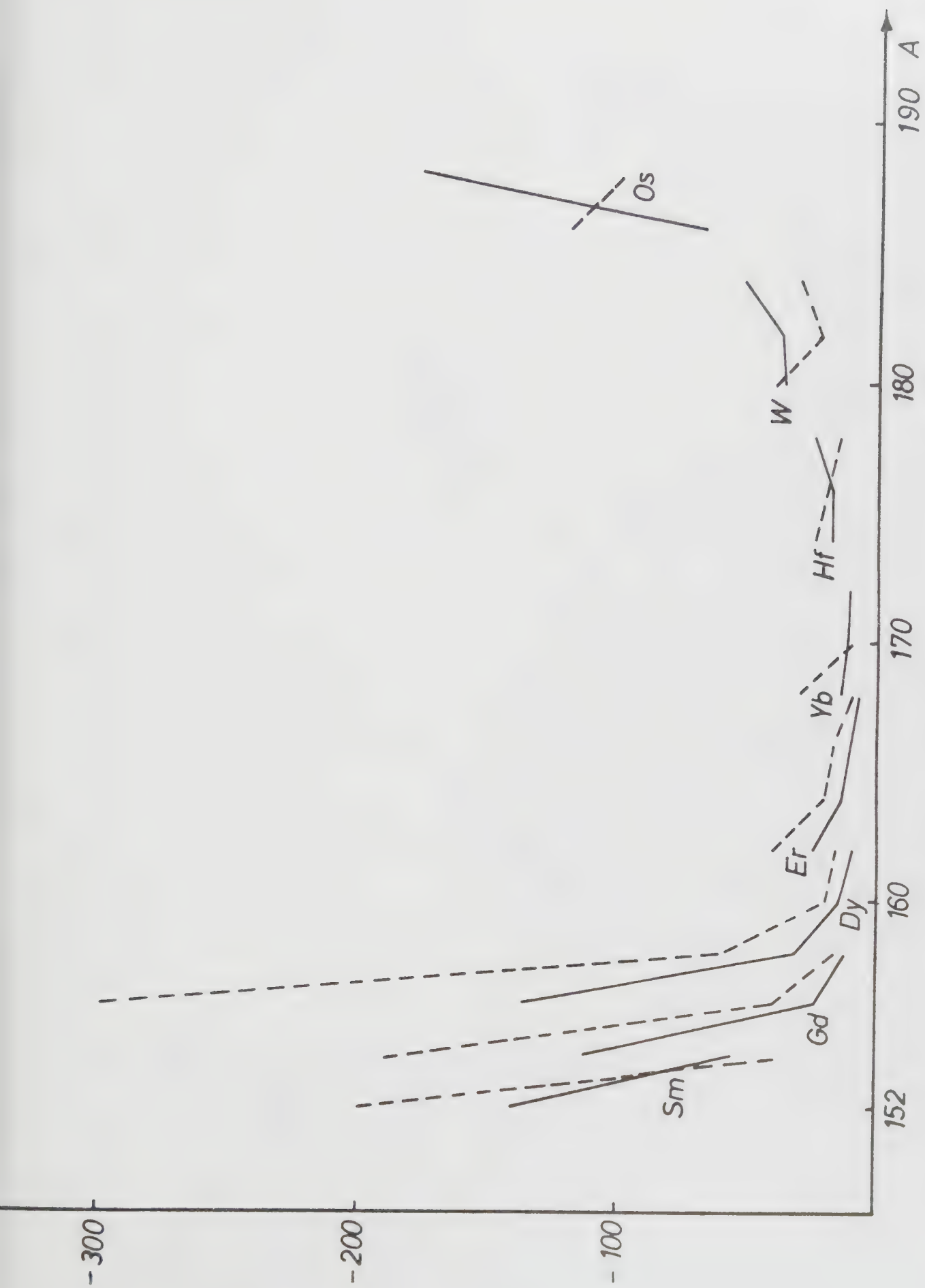


Fig.12

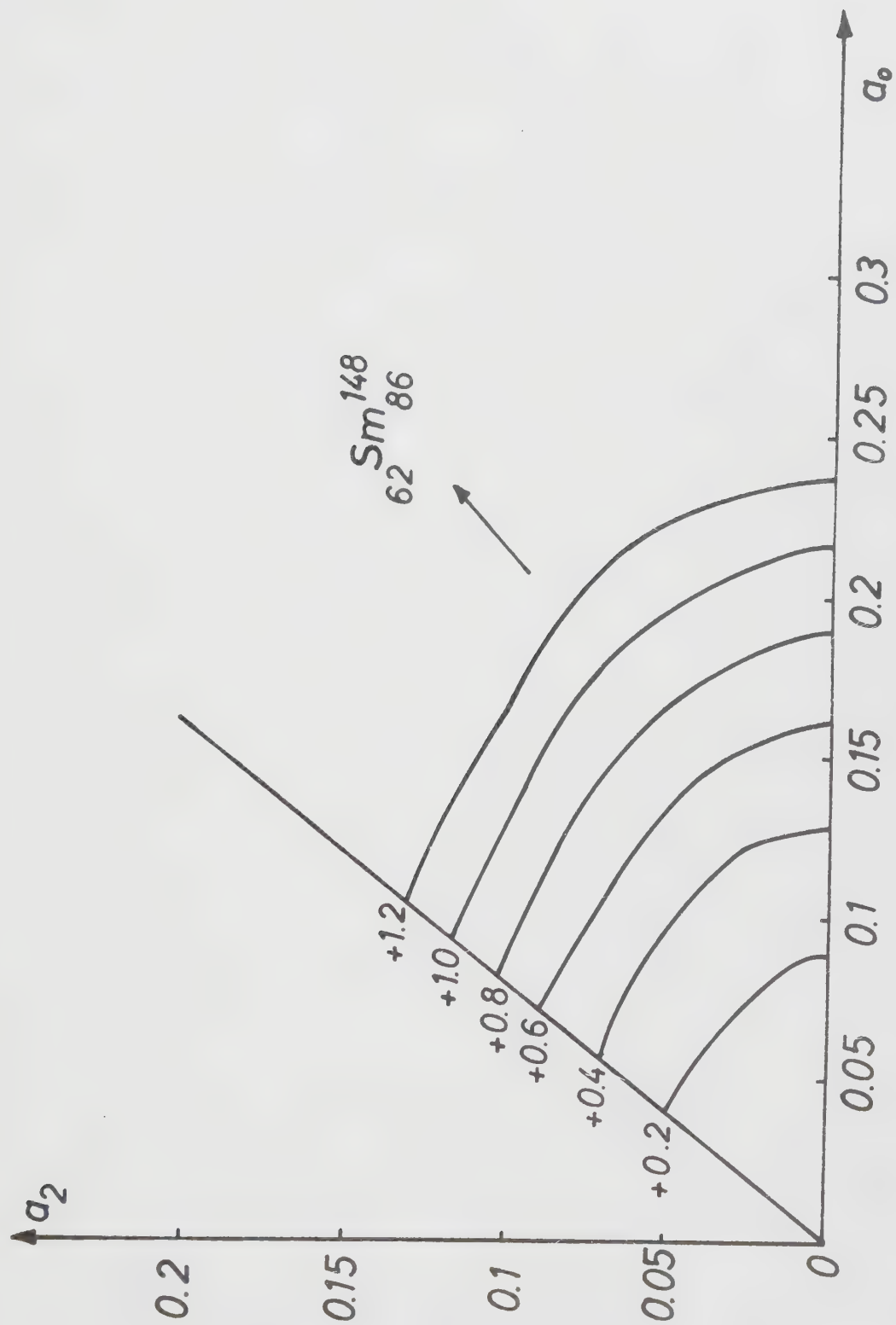


Fig.13a

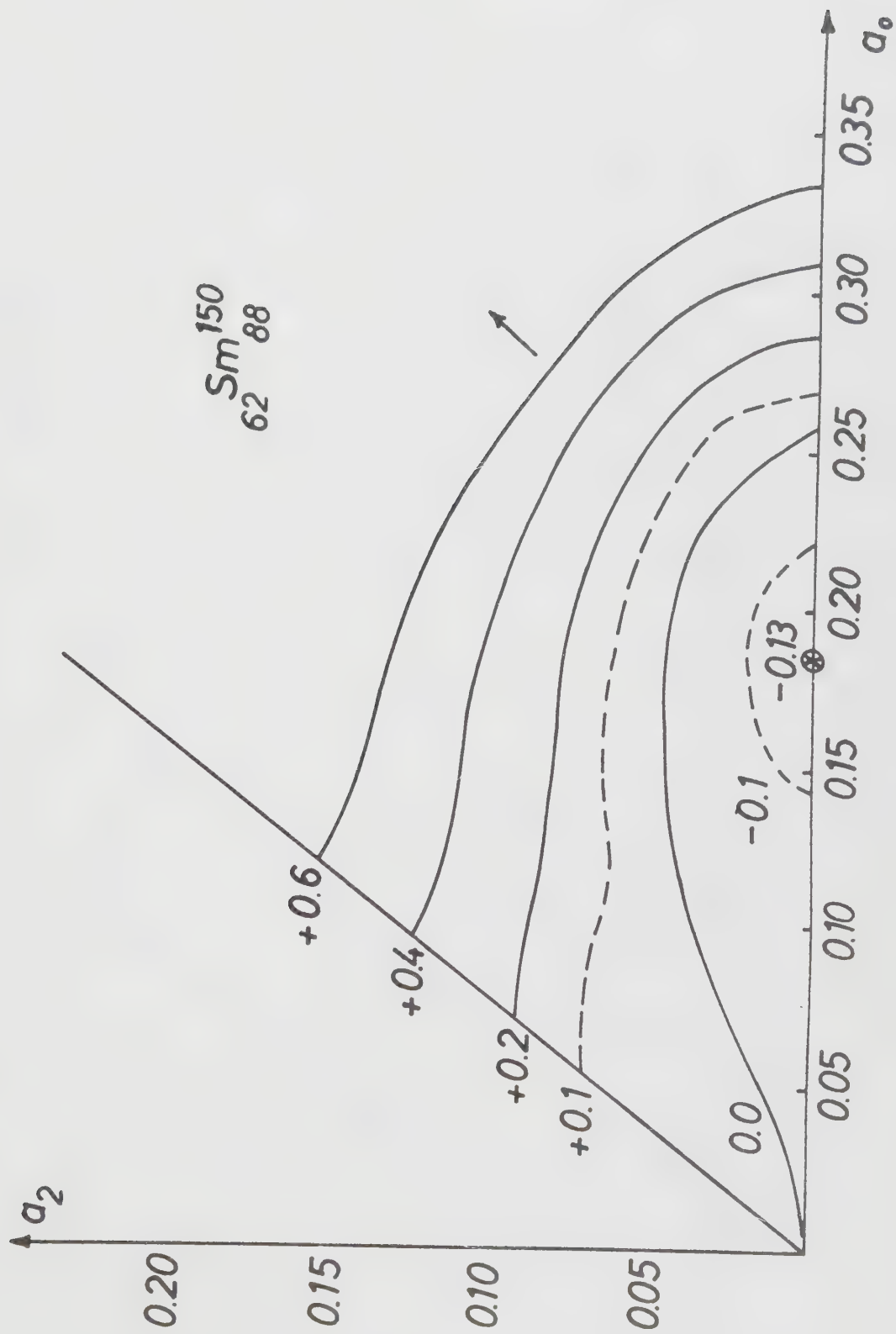


Fig.13b

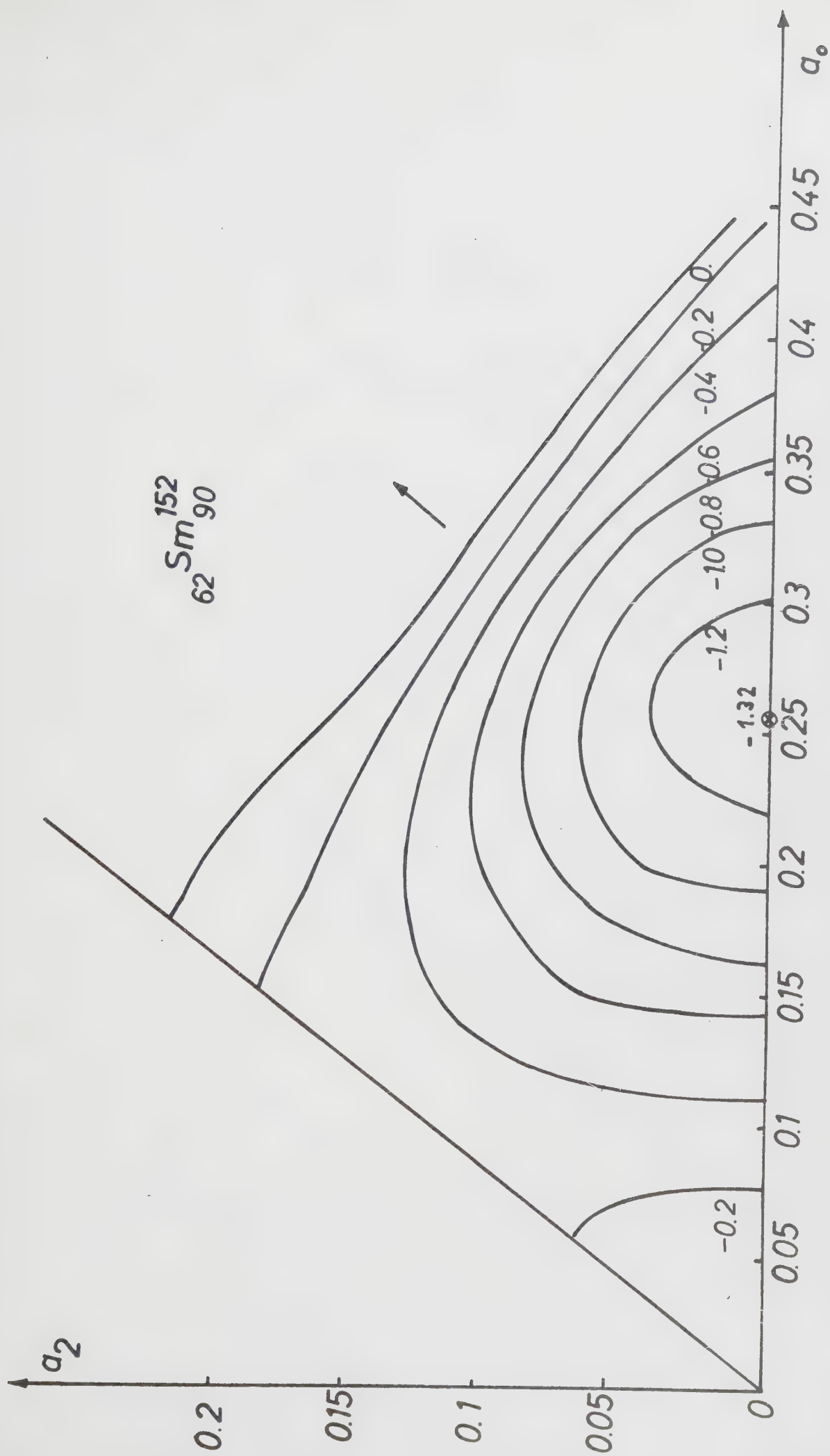


Fig. 13c

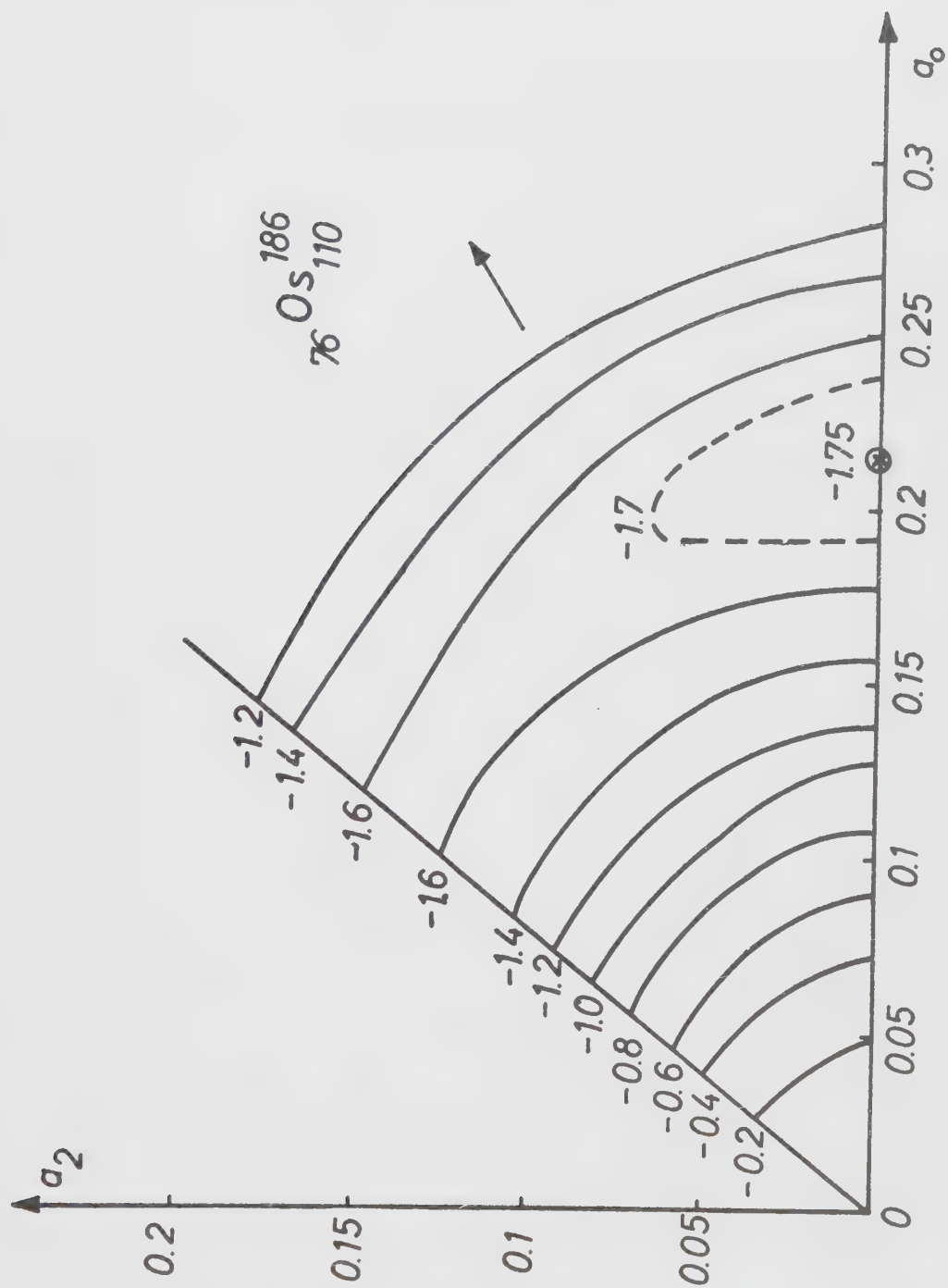
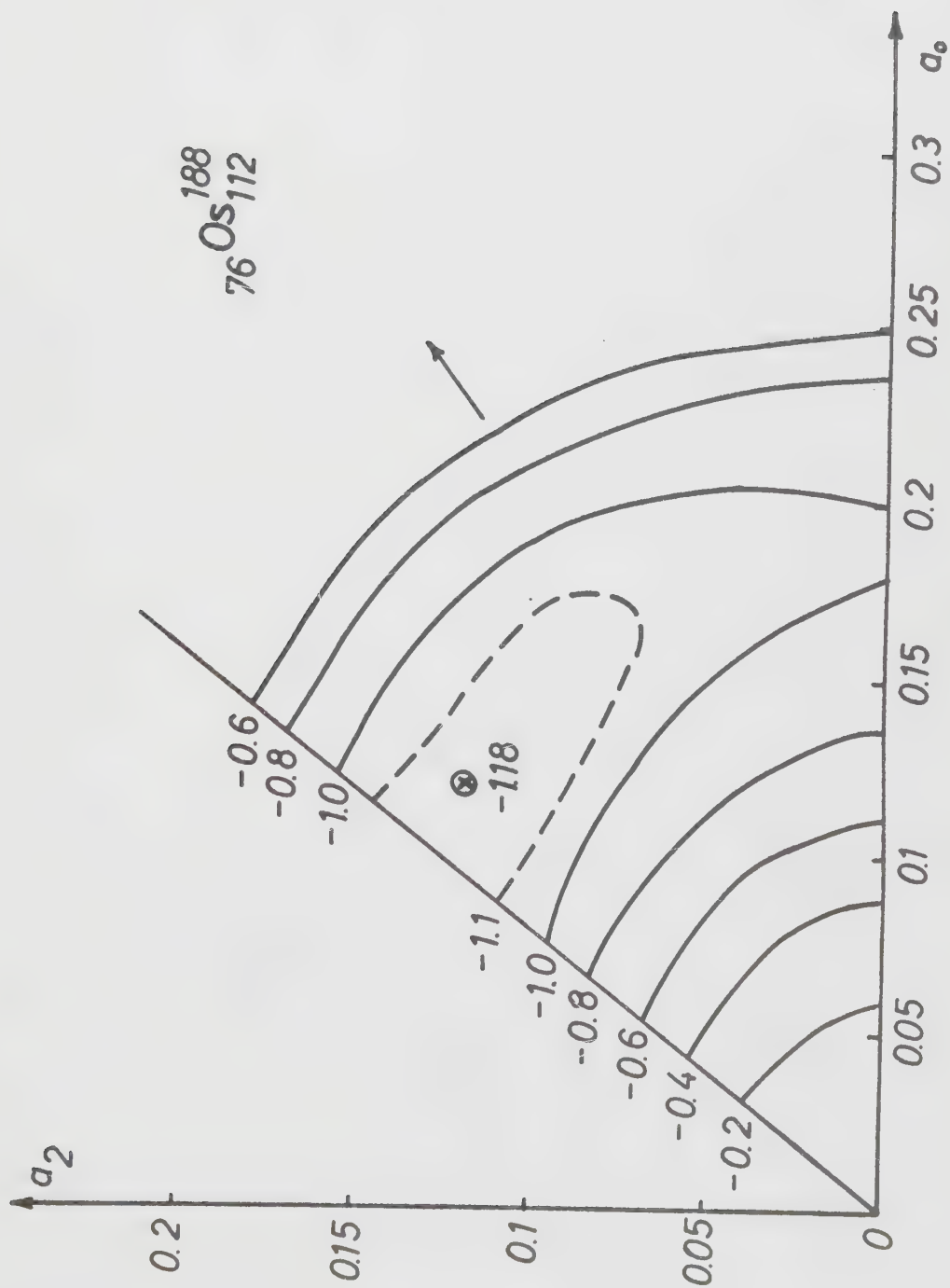
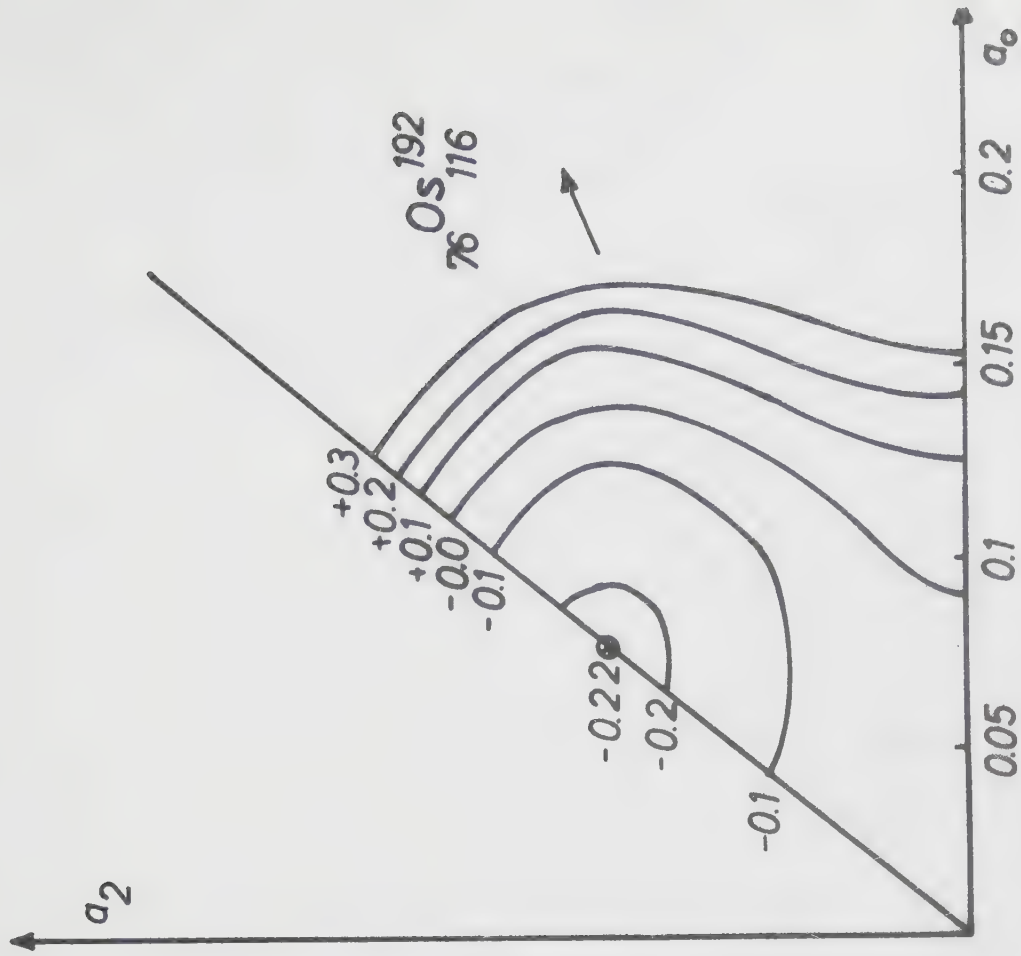
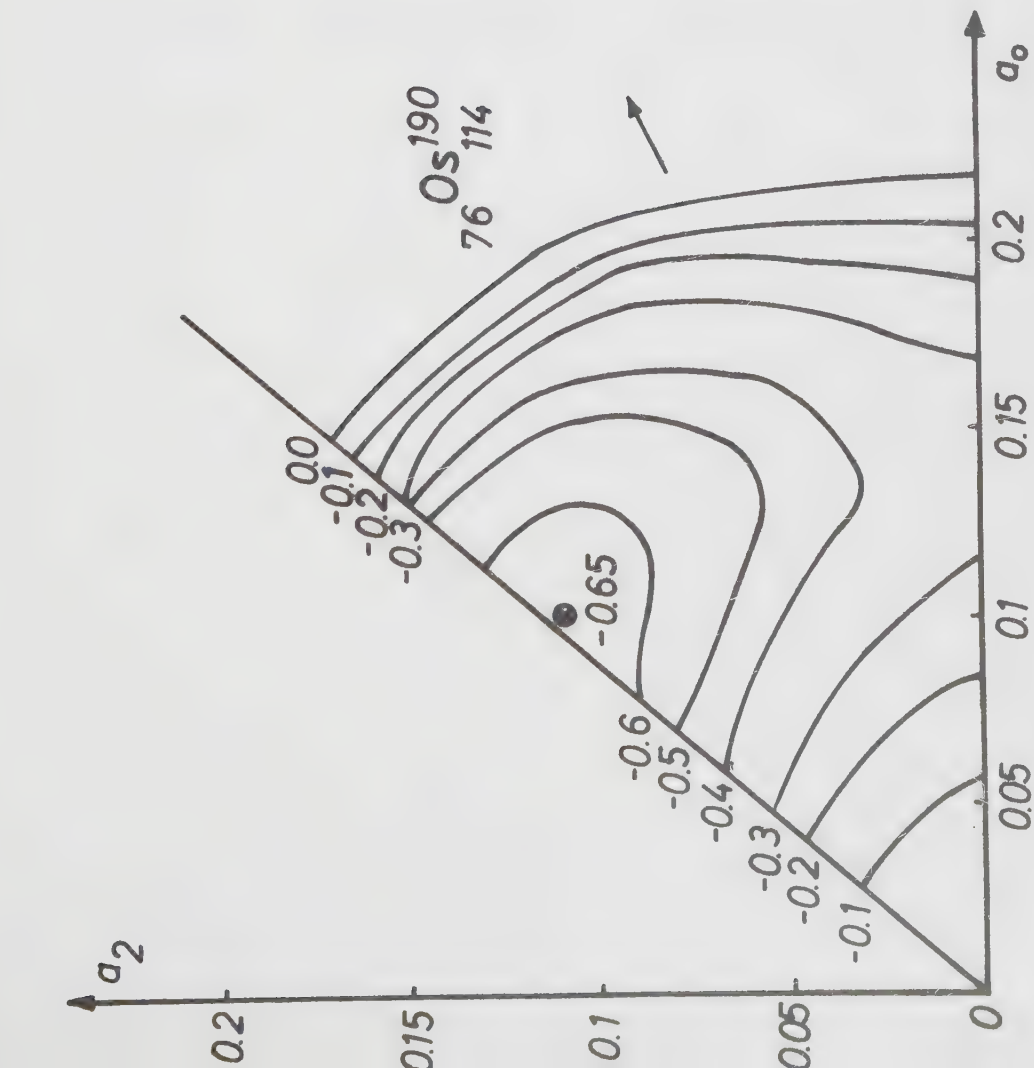


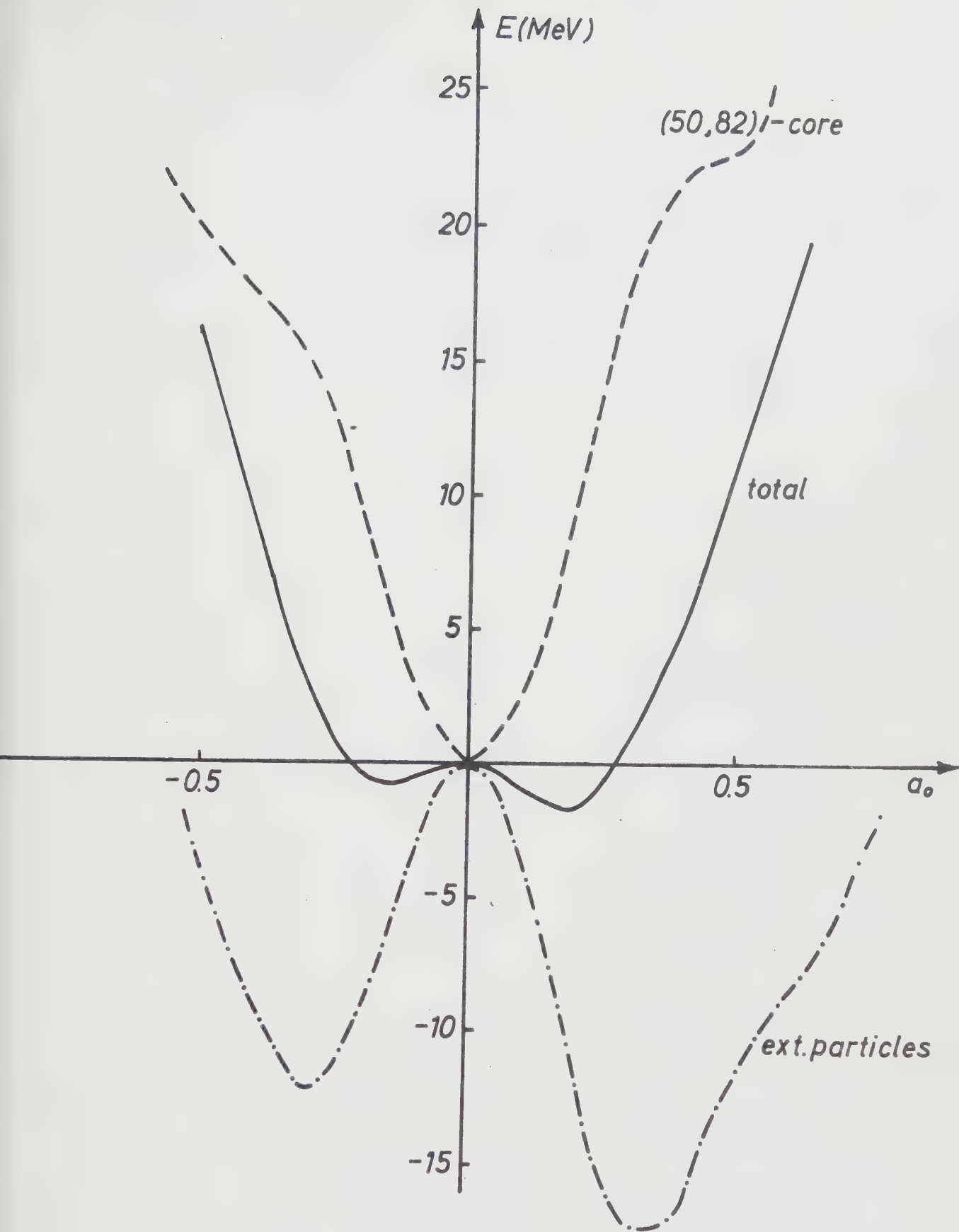
Fig. 14a



$^{188}_{76}\text{Os}_{112}$

Fig. 14b

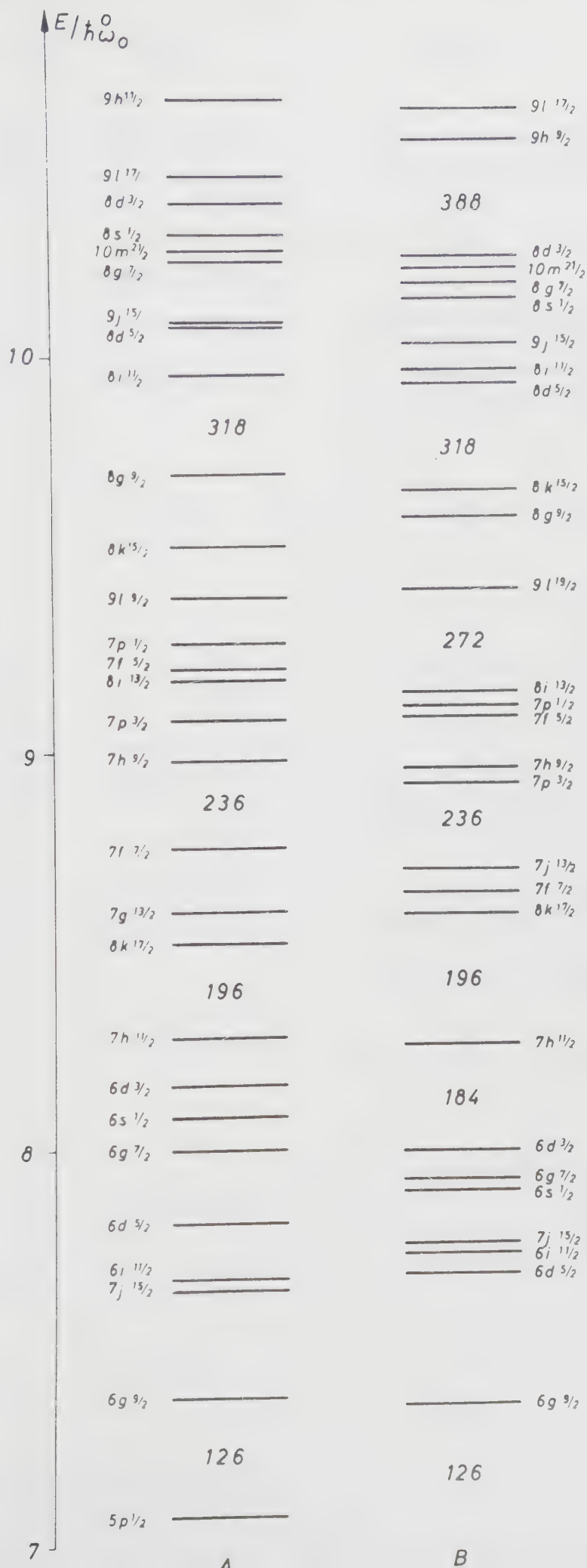


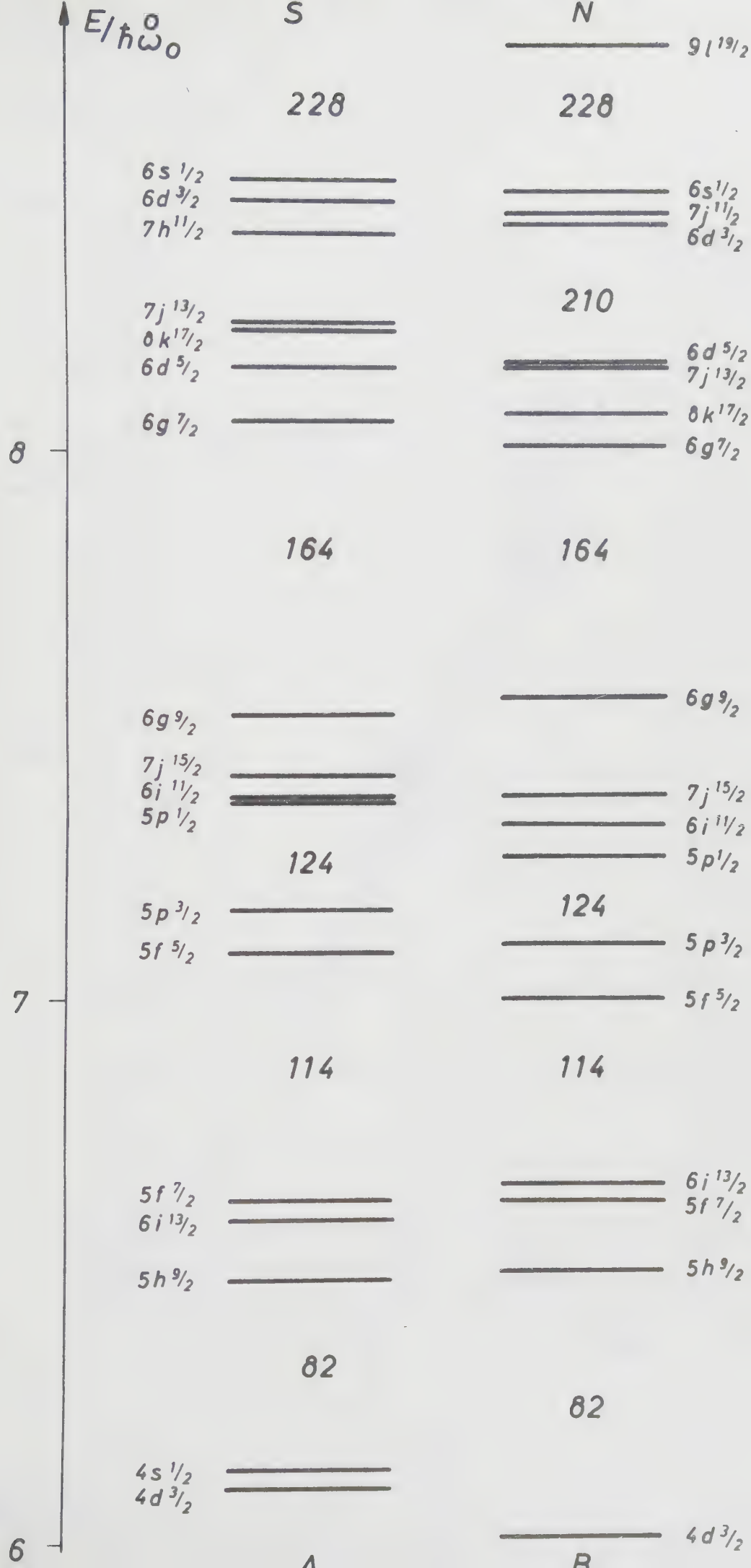


${}_{74}^{180}\text{W}_{106}$

Fig. 15

Abb. 16a





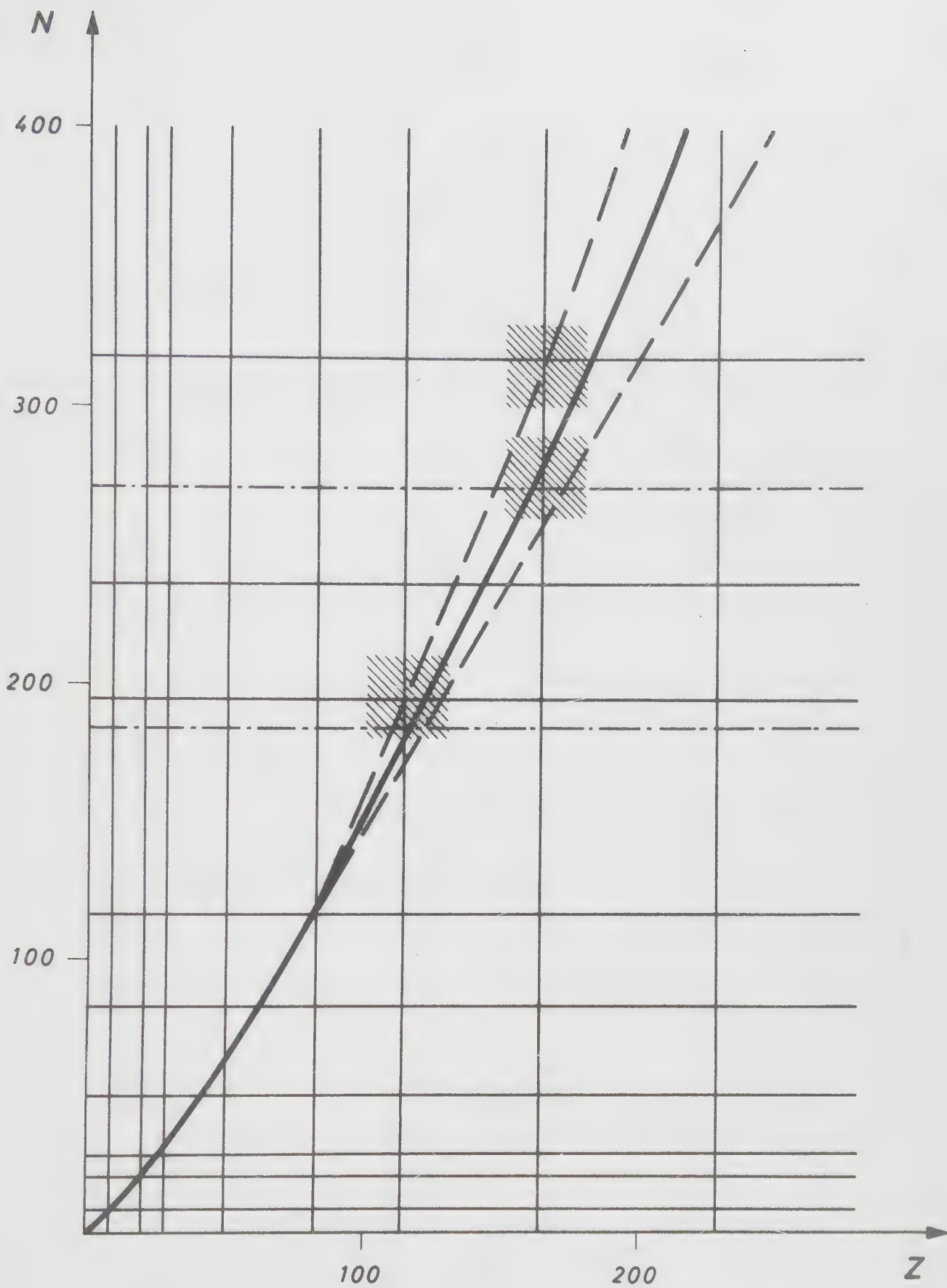


Abb. 17

Abb. 18 a

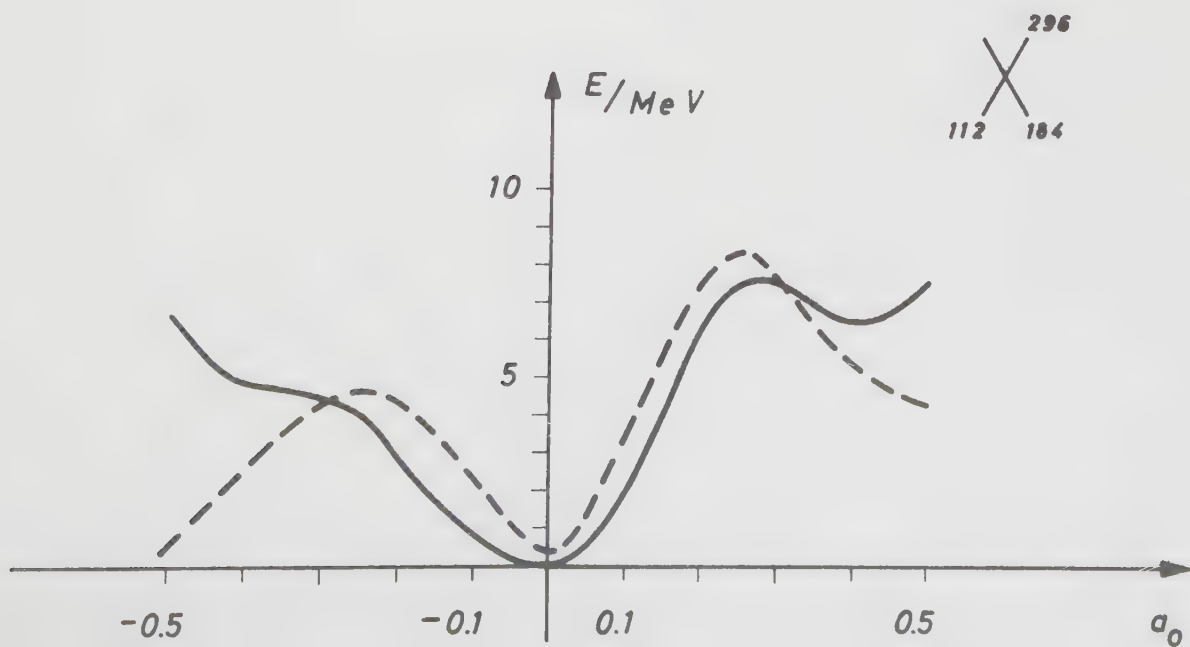
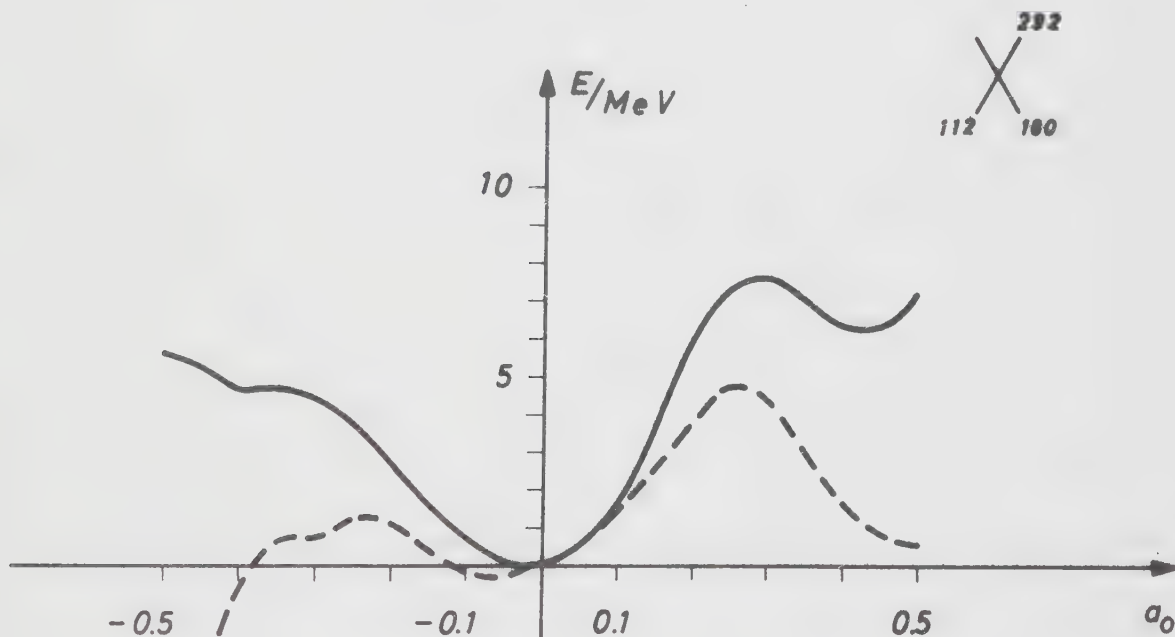
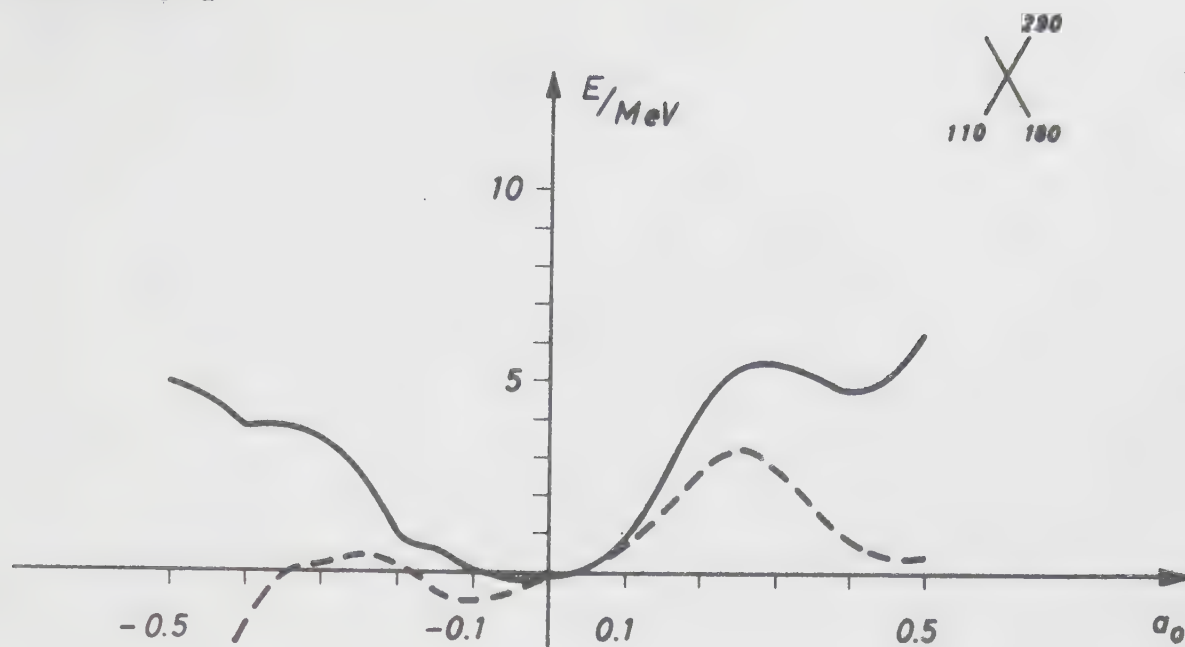


Abb.18 b

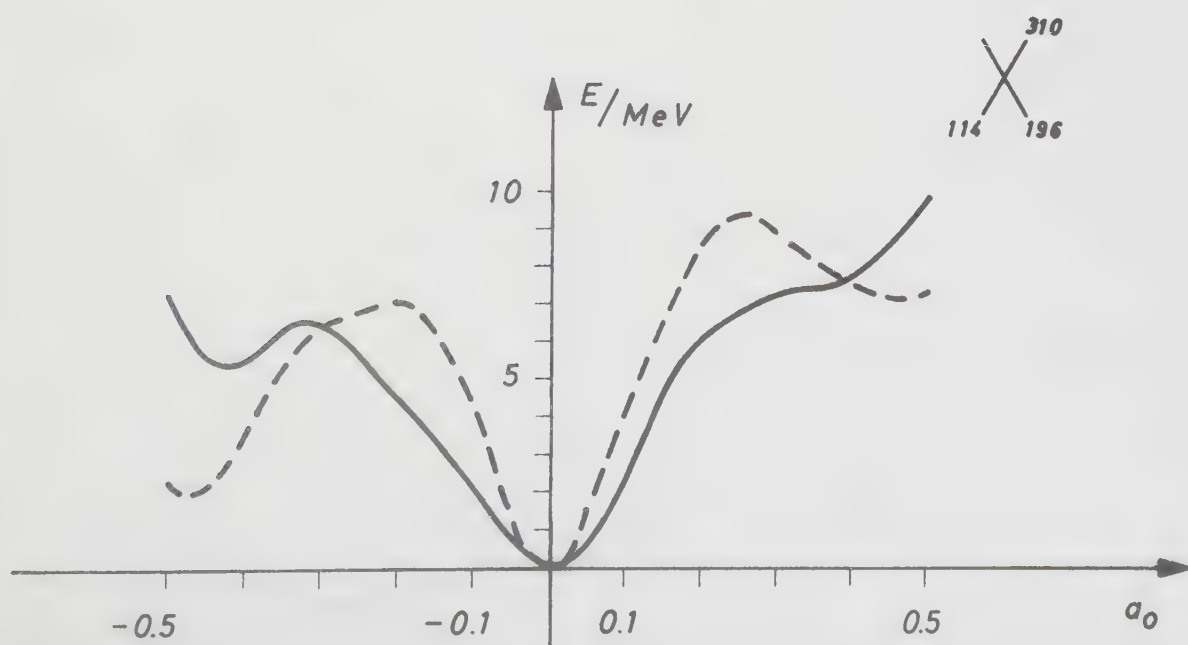
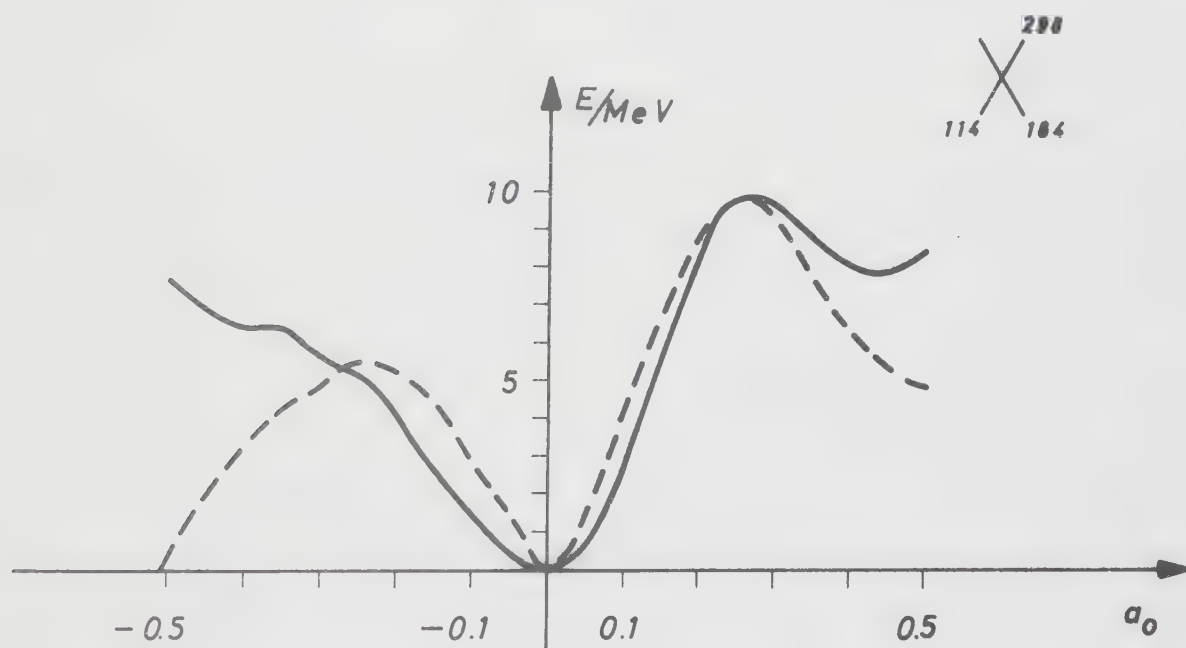
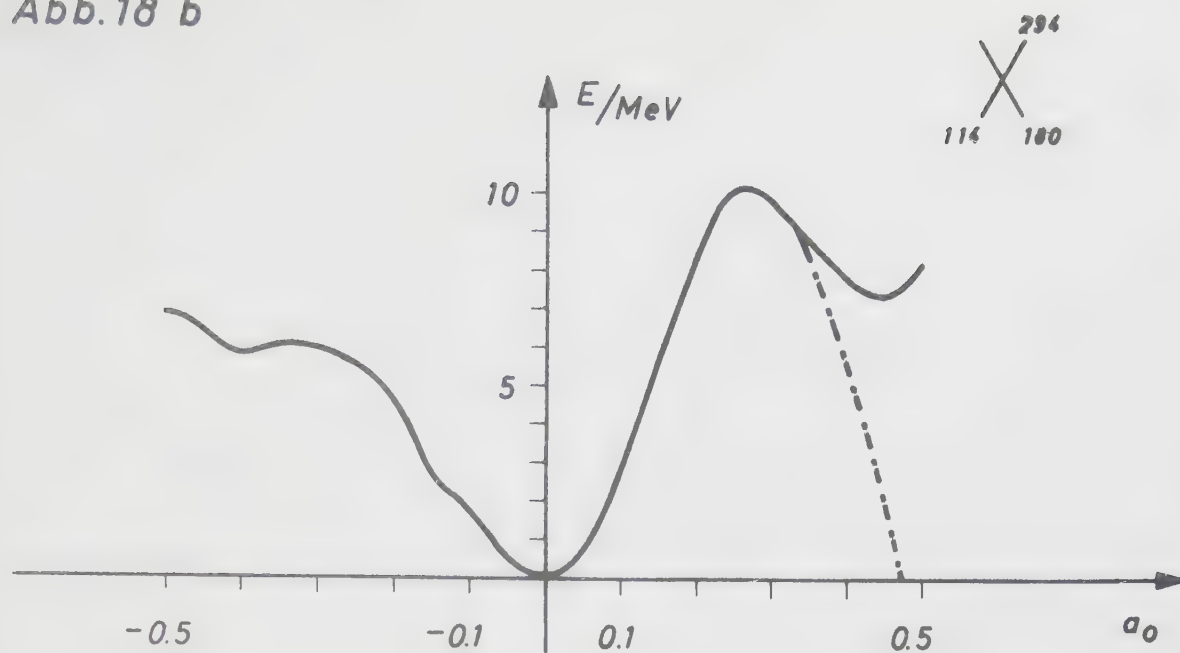


Abb. 18c

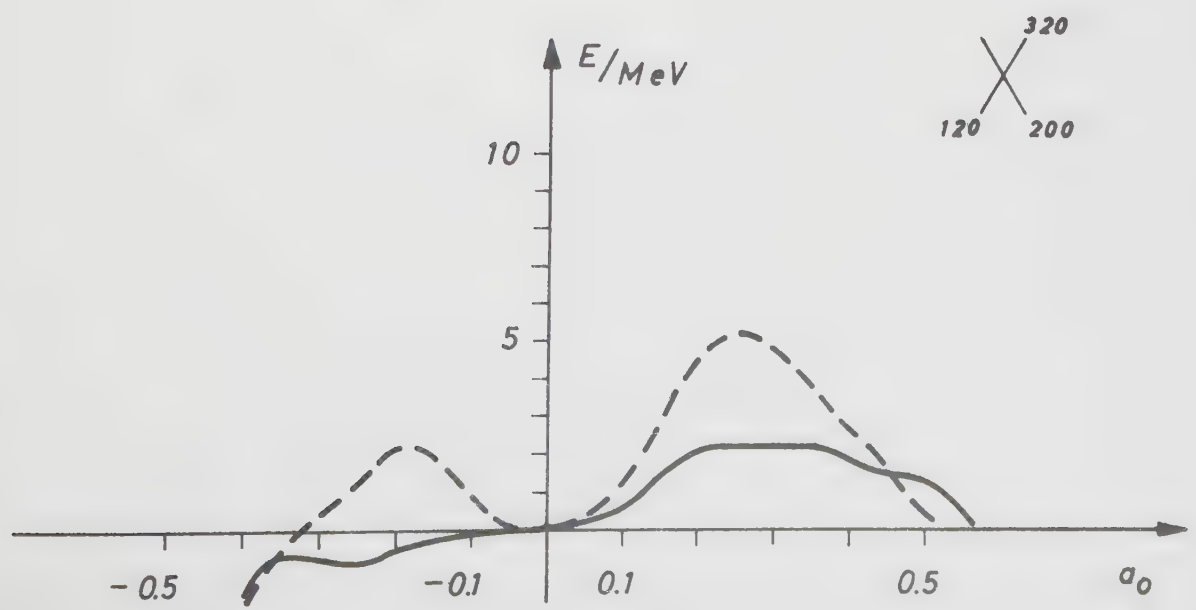
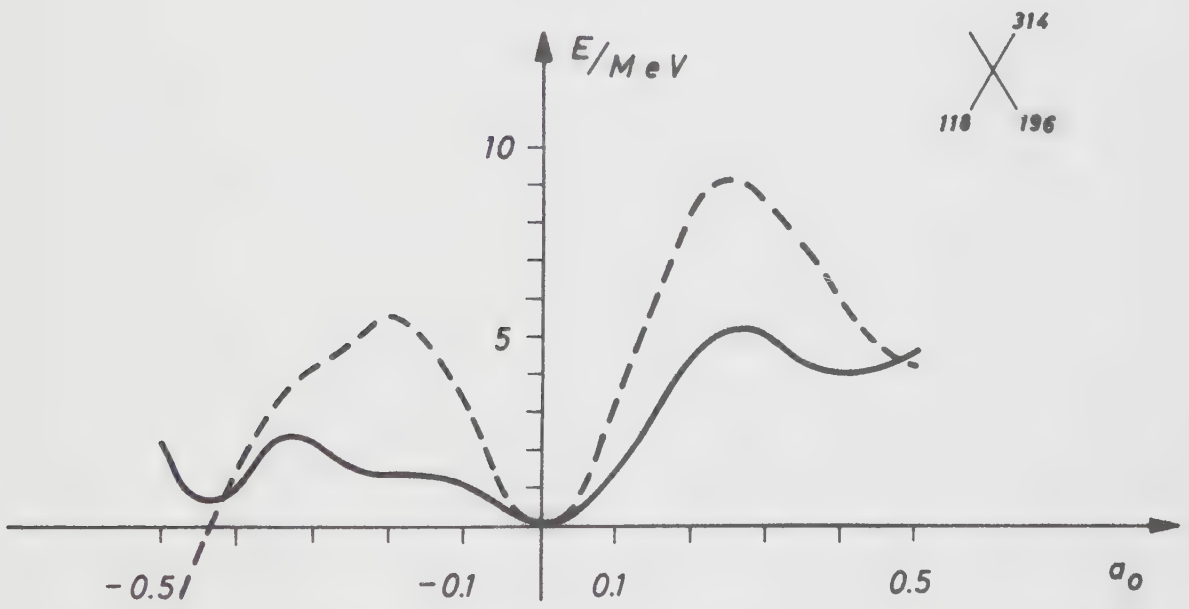
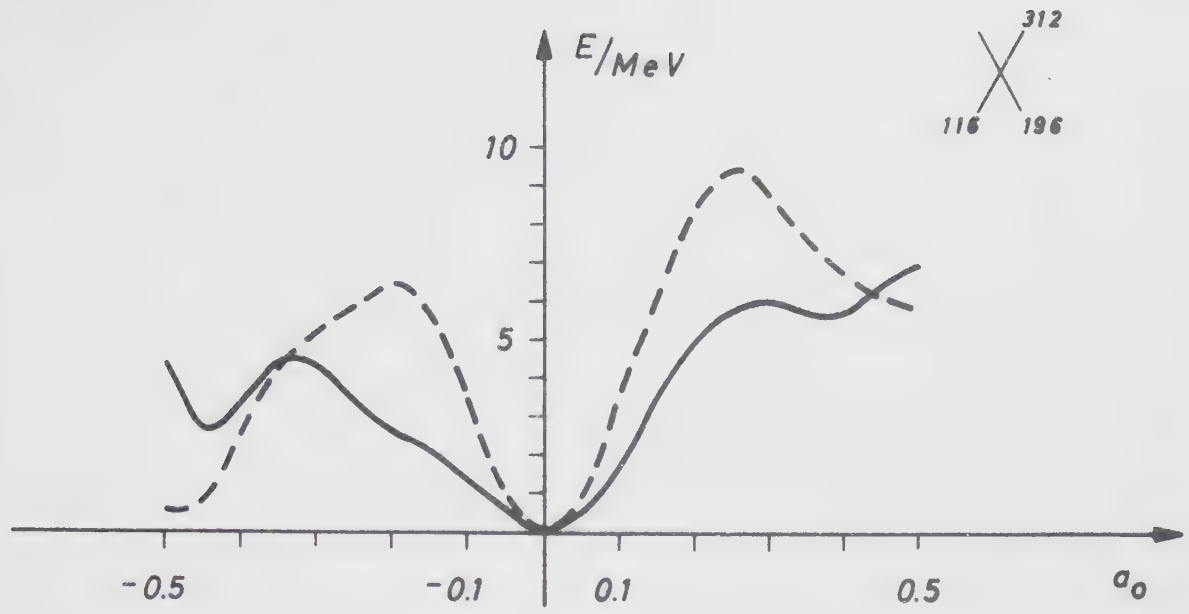


Abb. 18 d

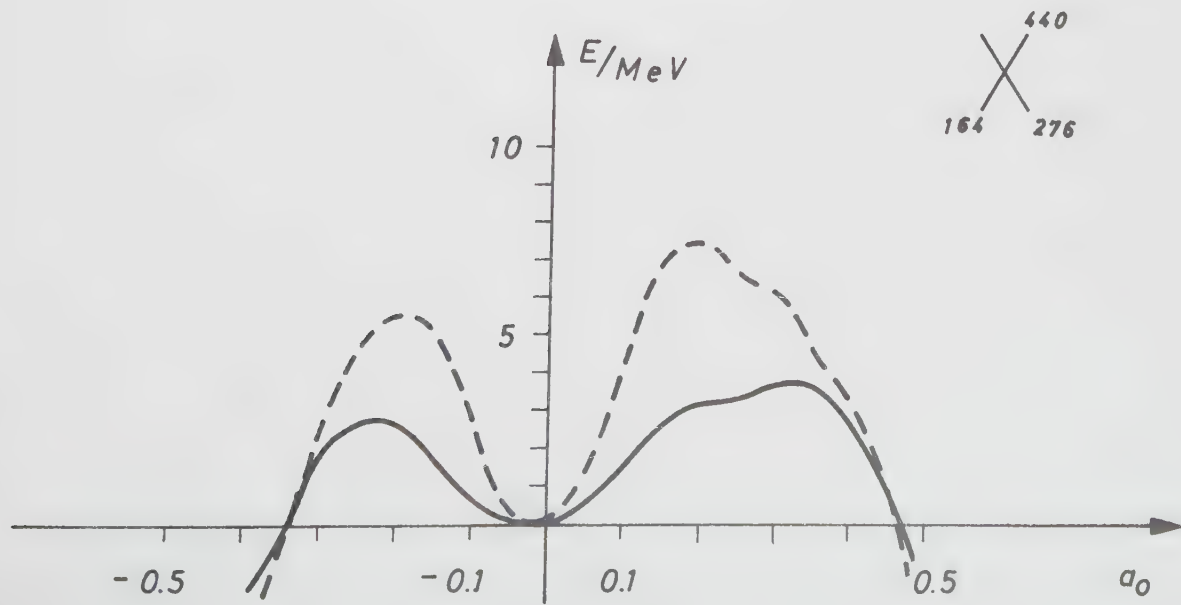
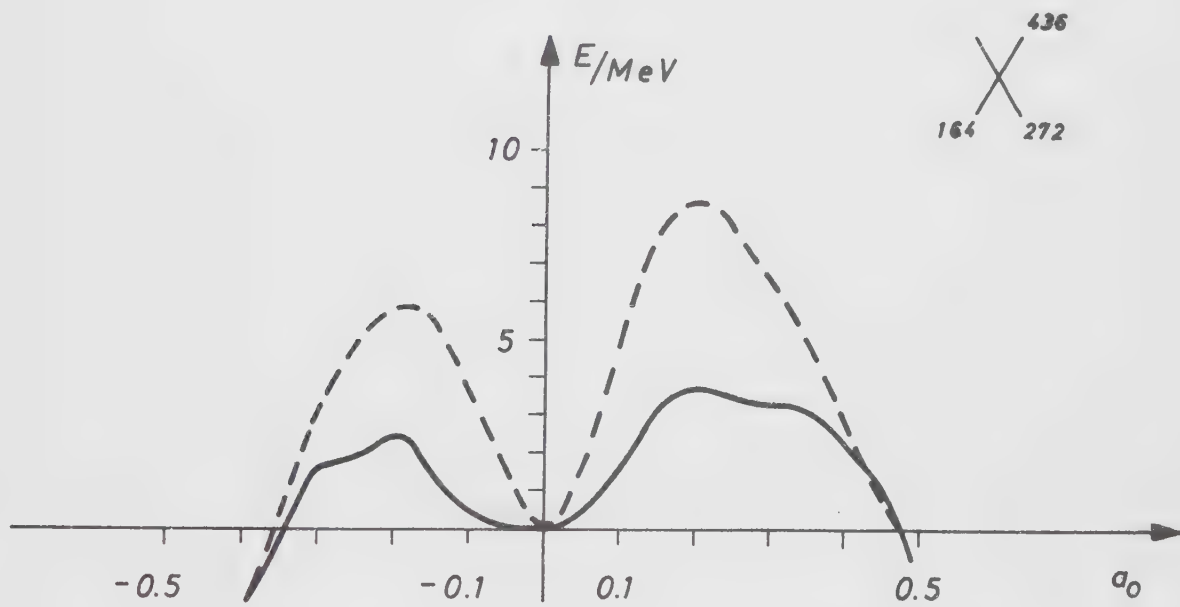
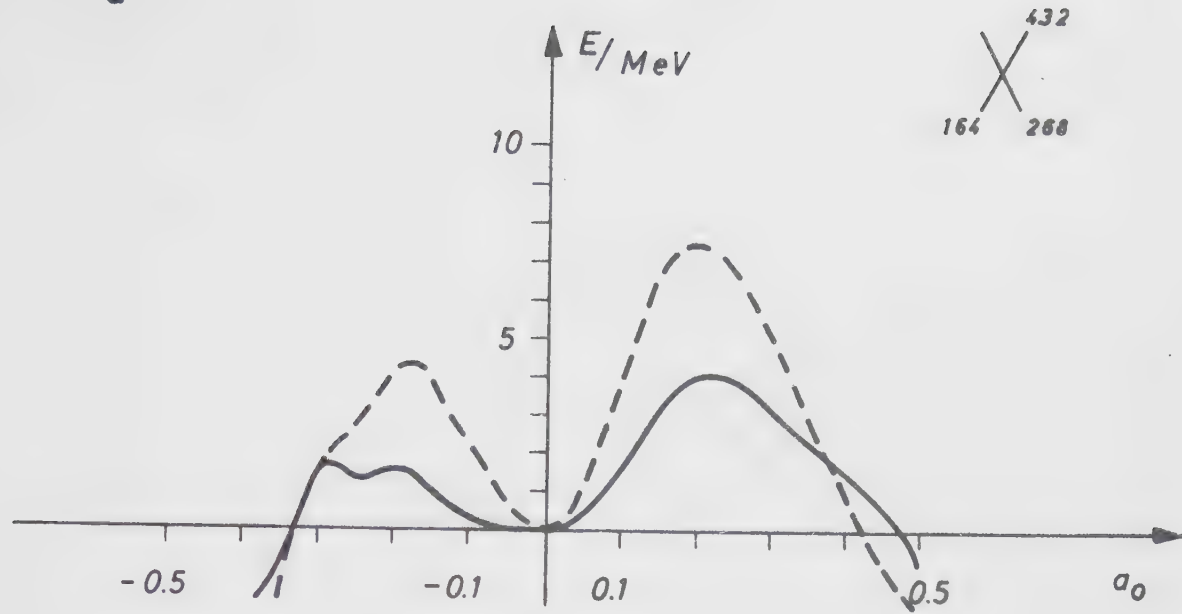


Abb. 18 e

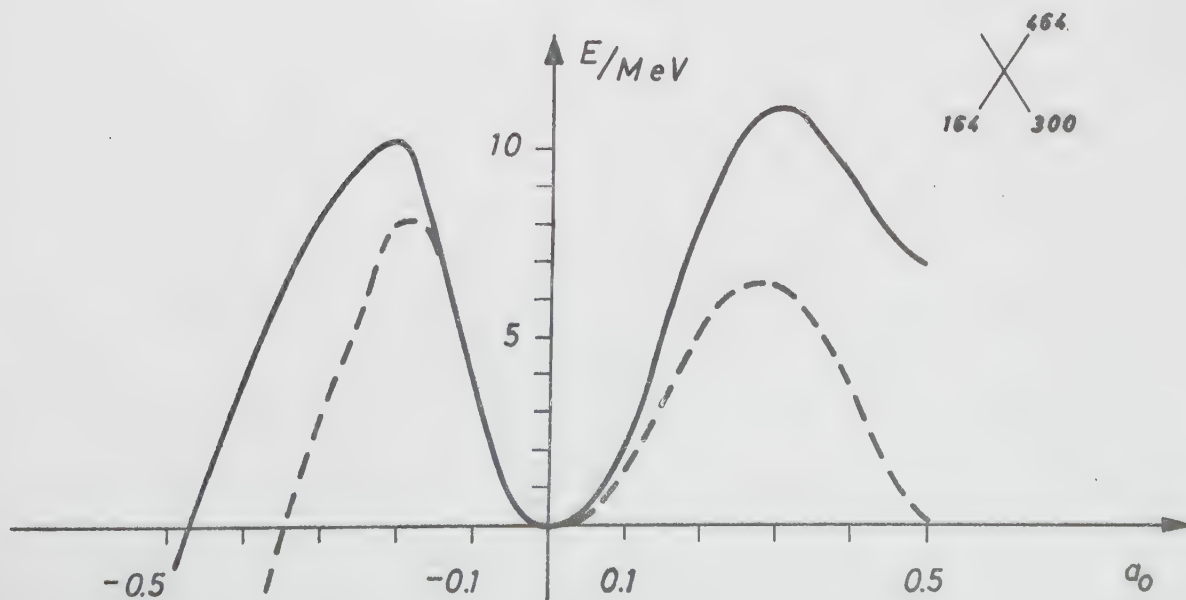
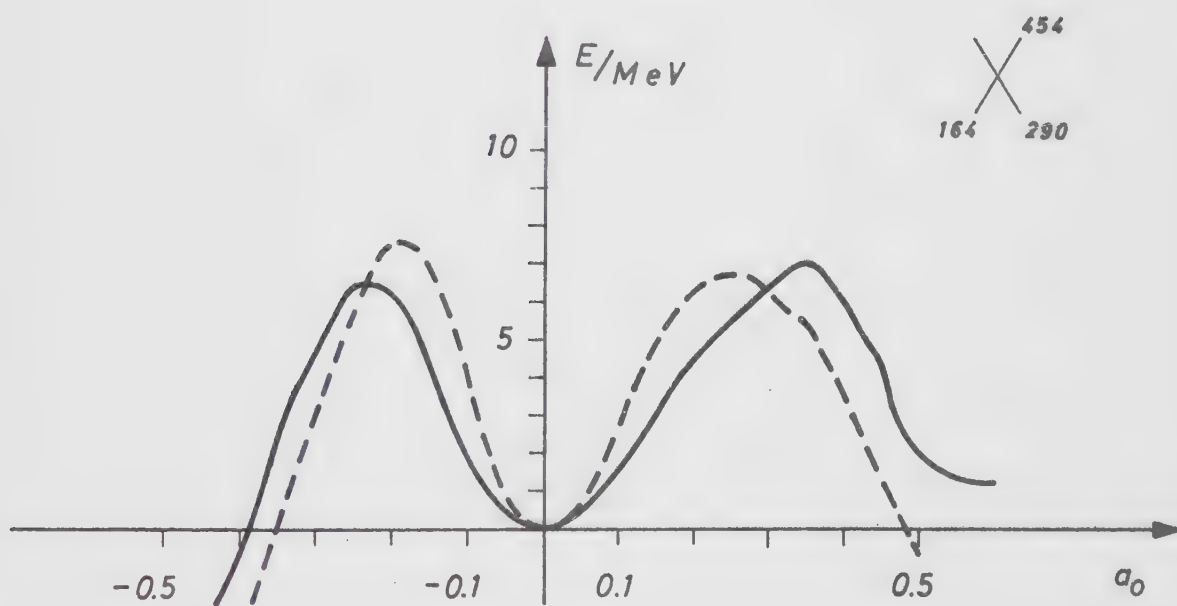
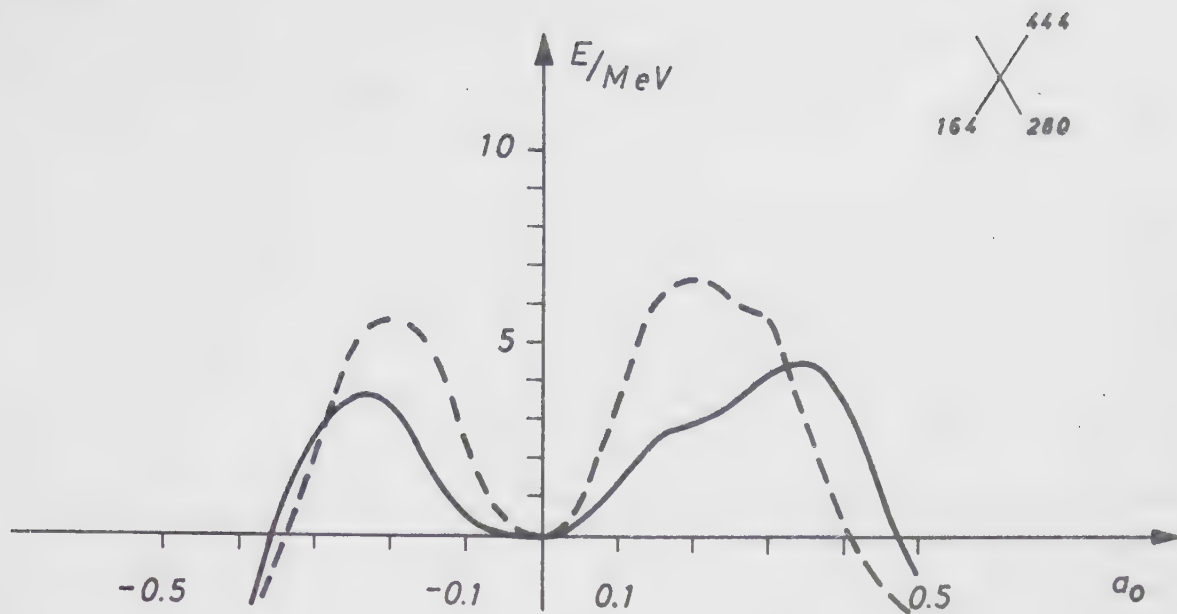


Abb. 18 f

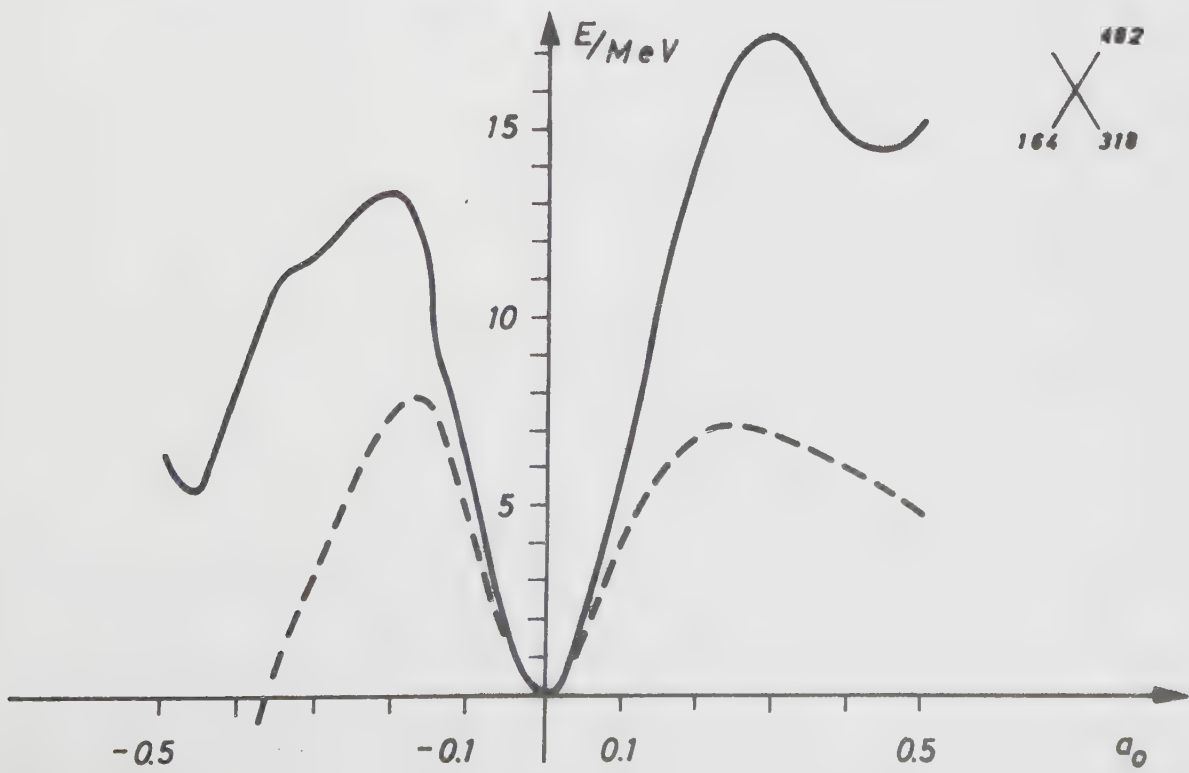
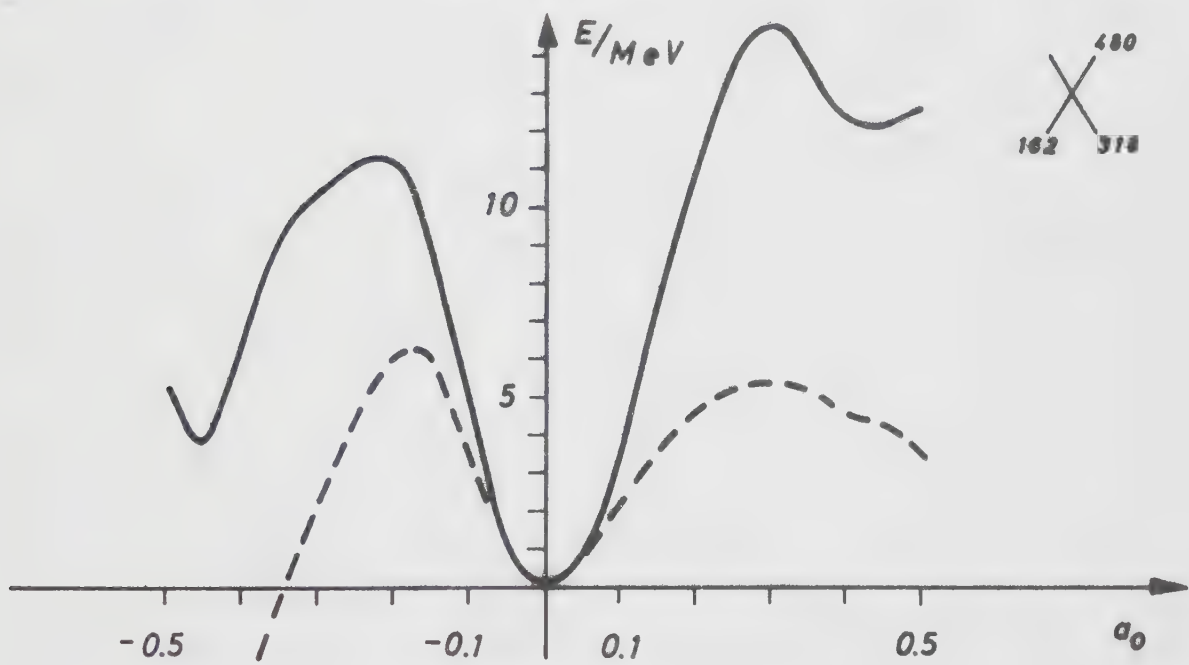
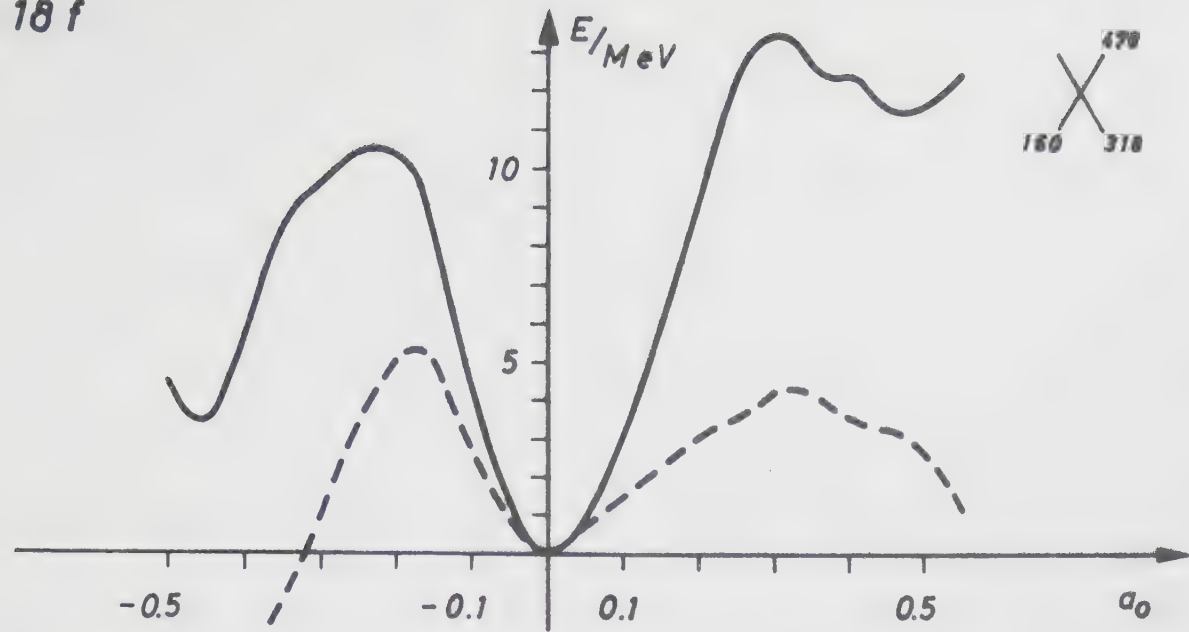


Abb.18 g

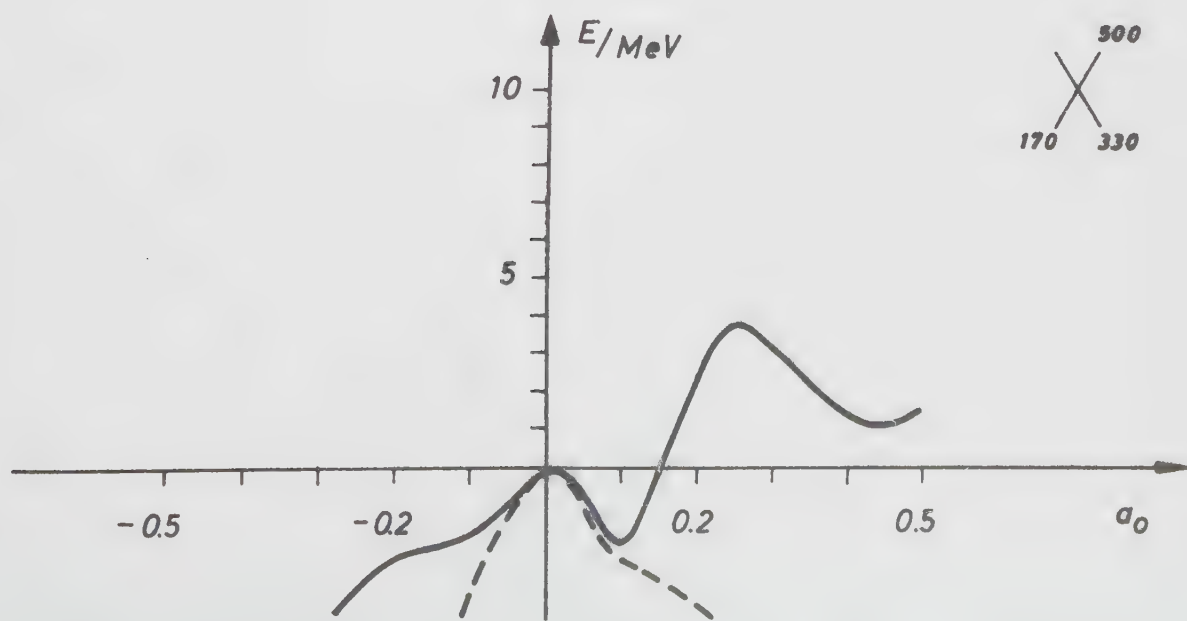
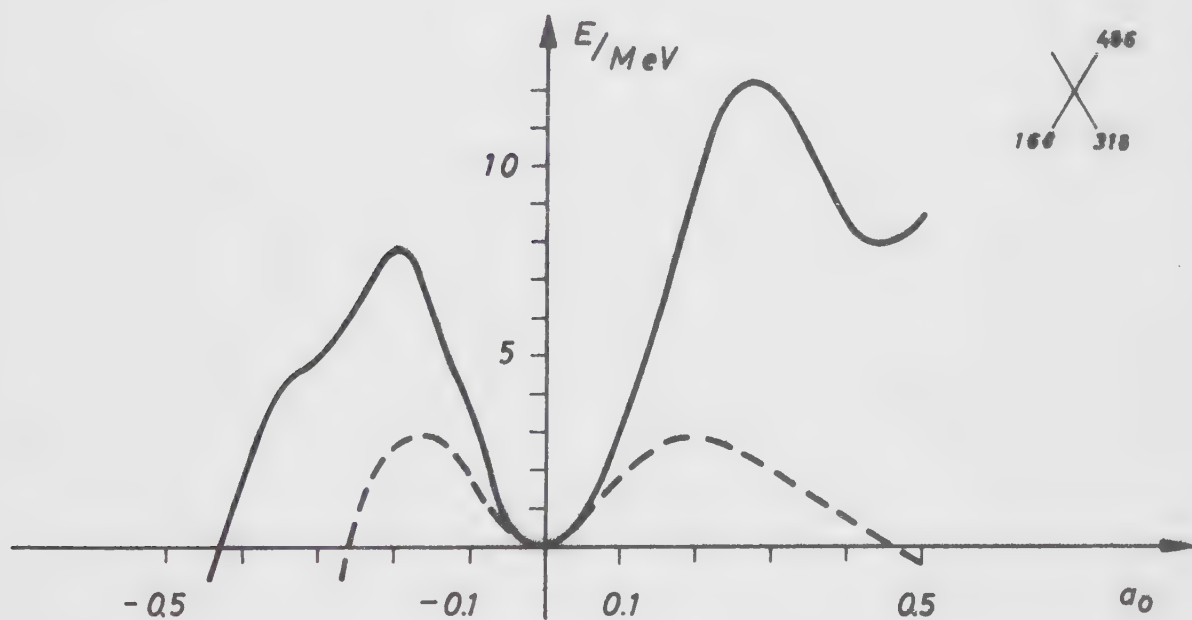
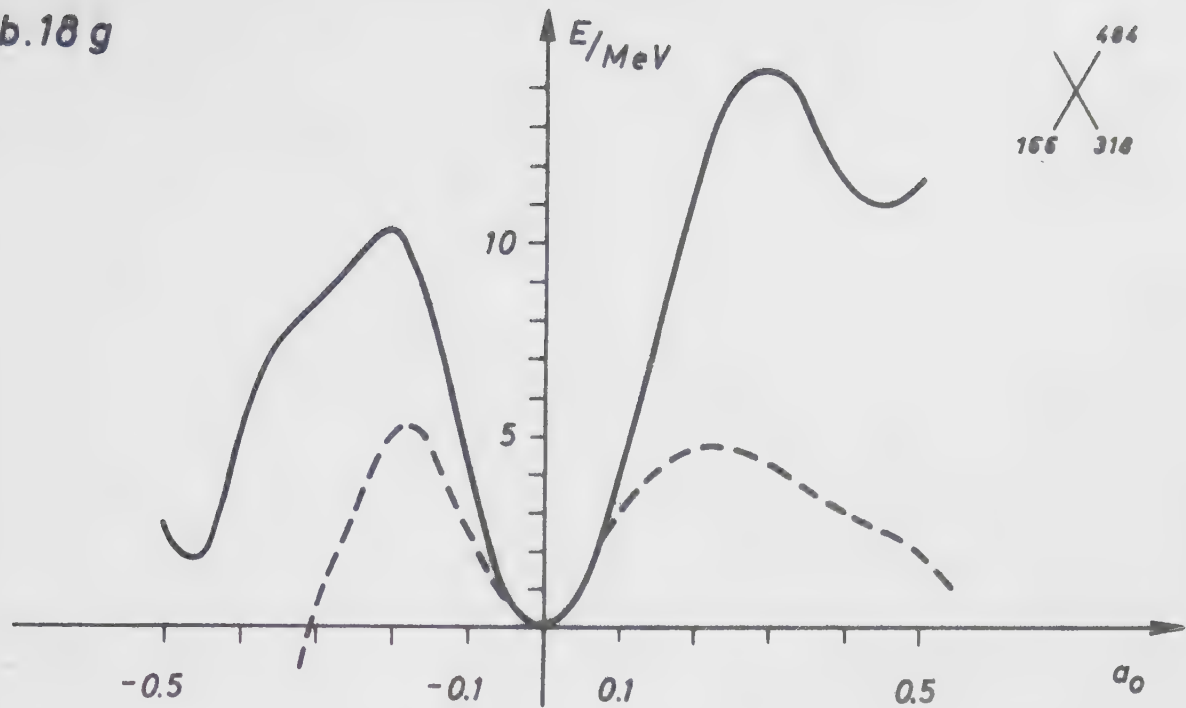


Abb. 18 h

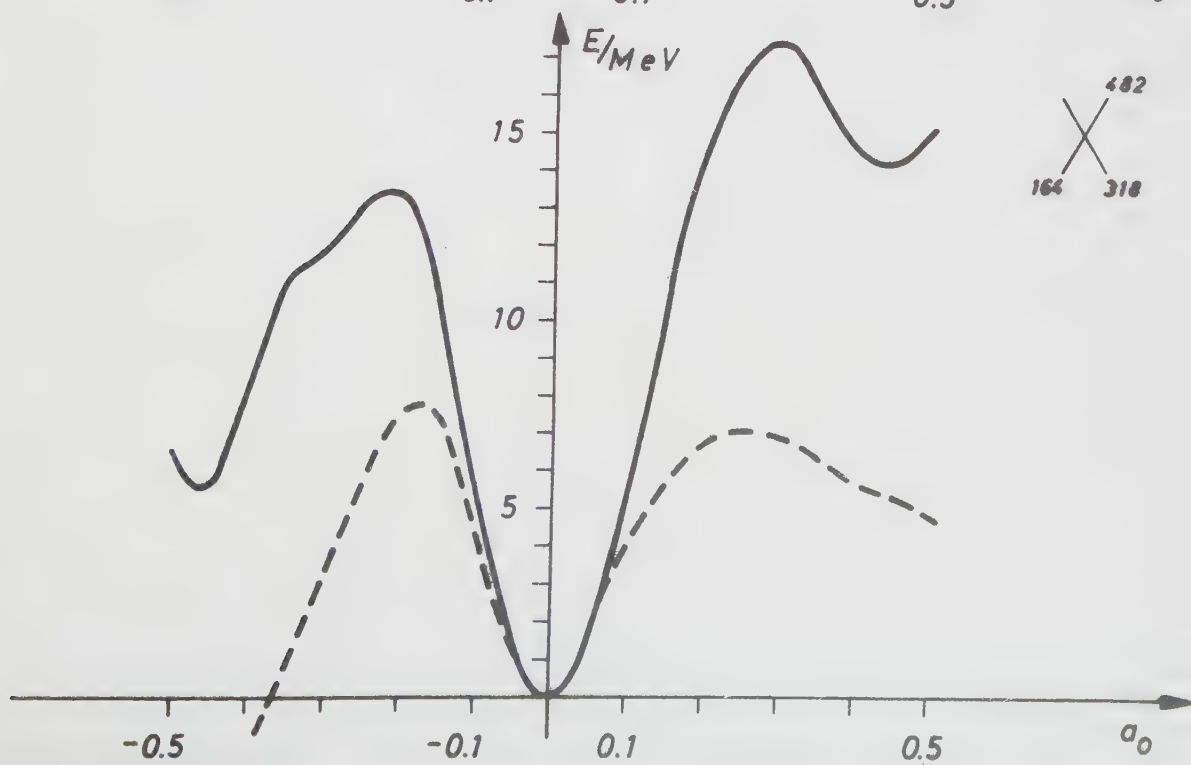
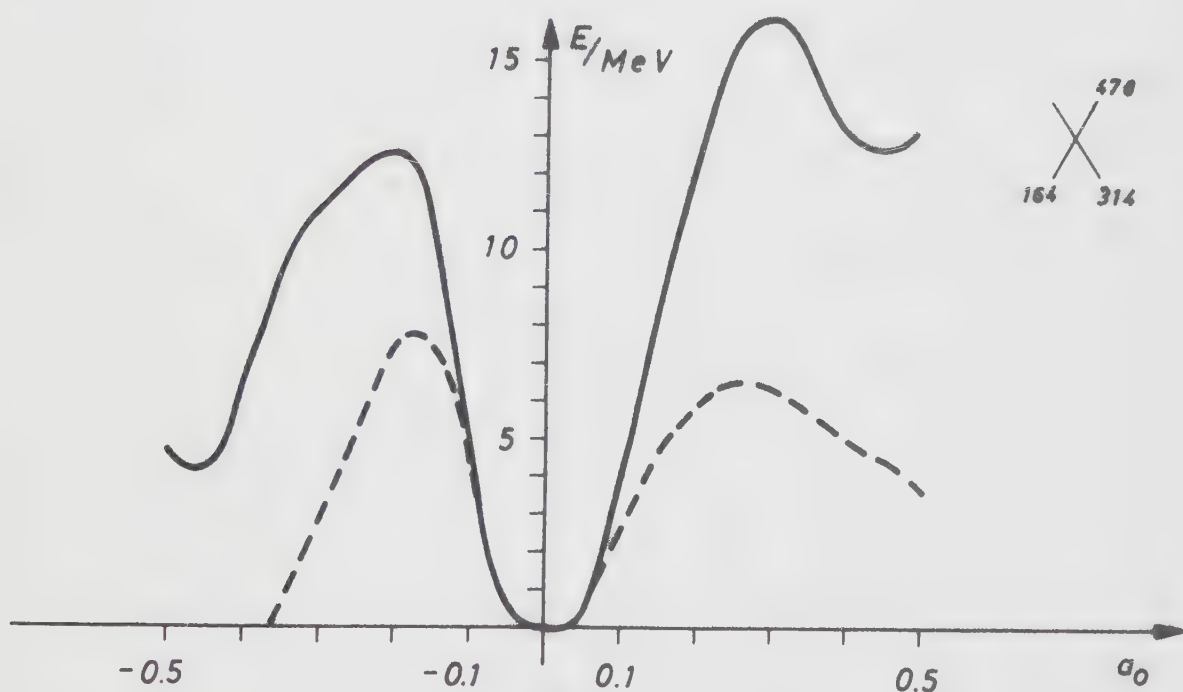
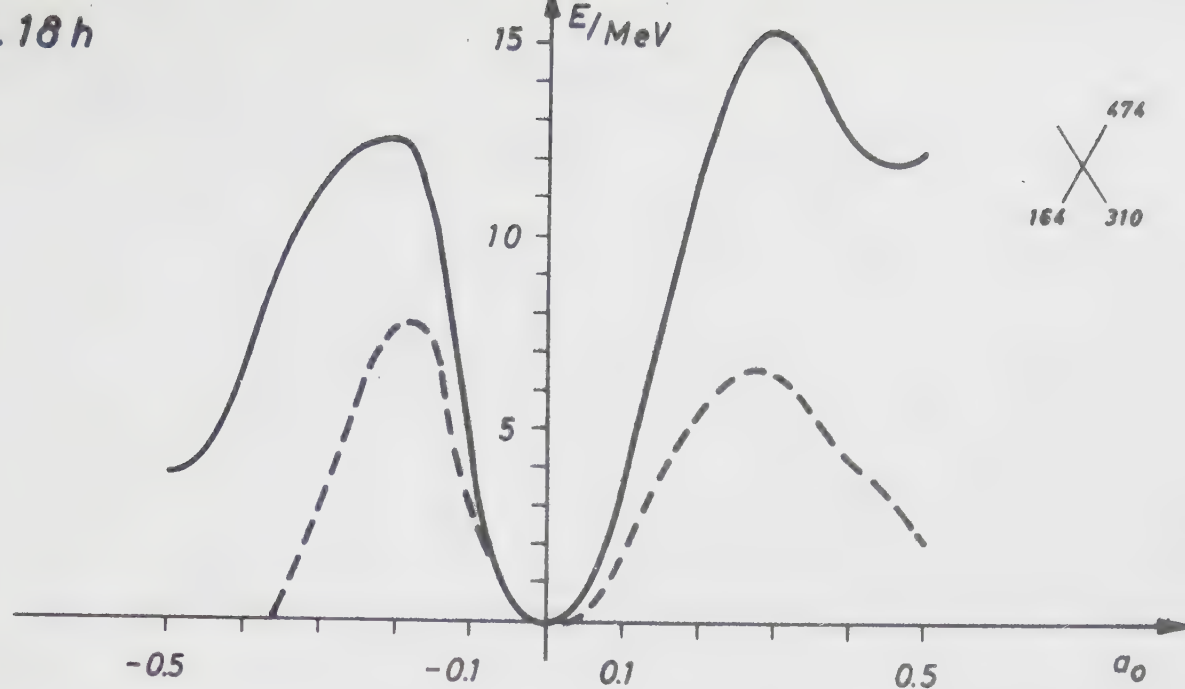


Abb. 18 i

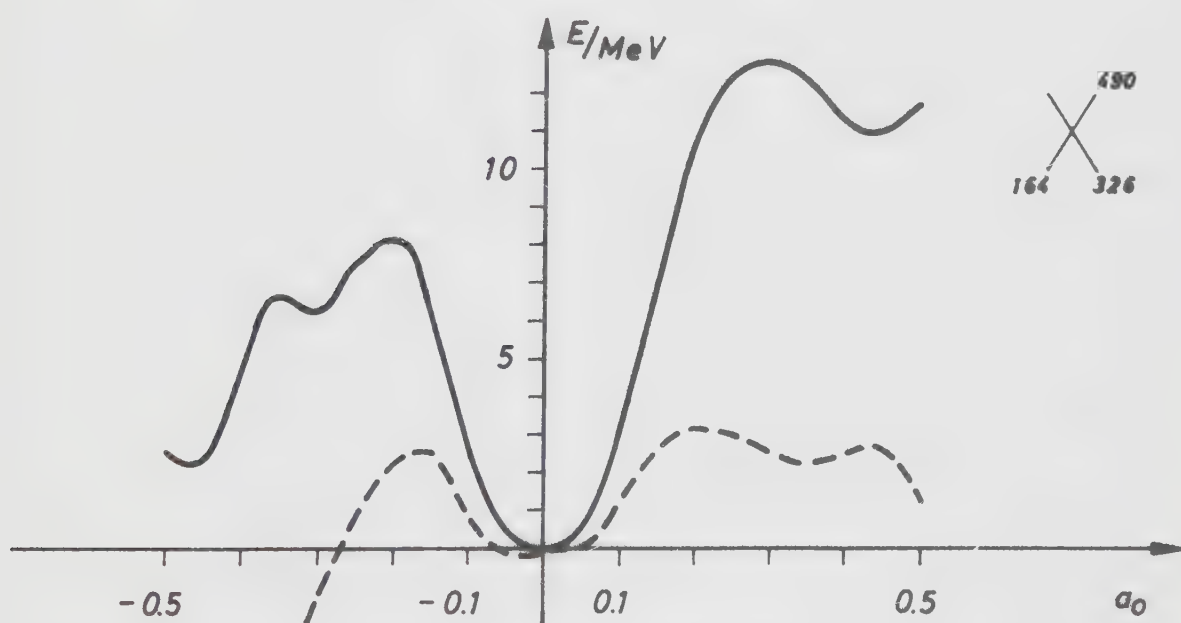
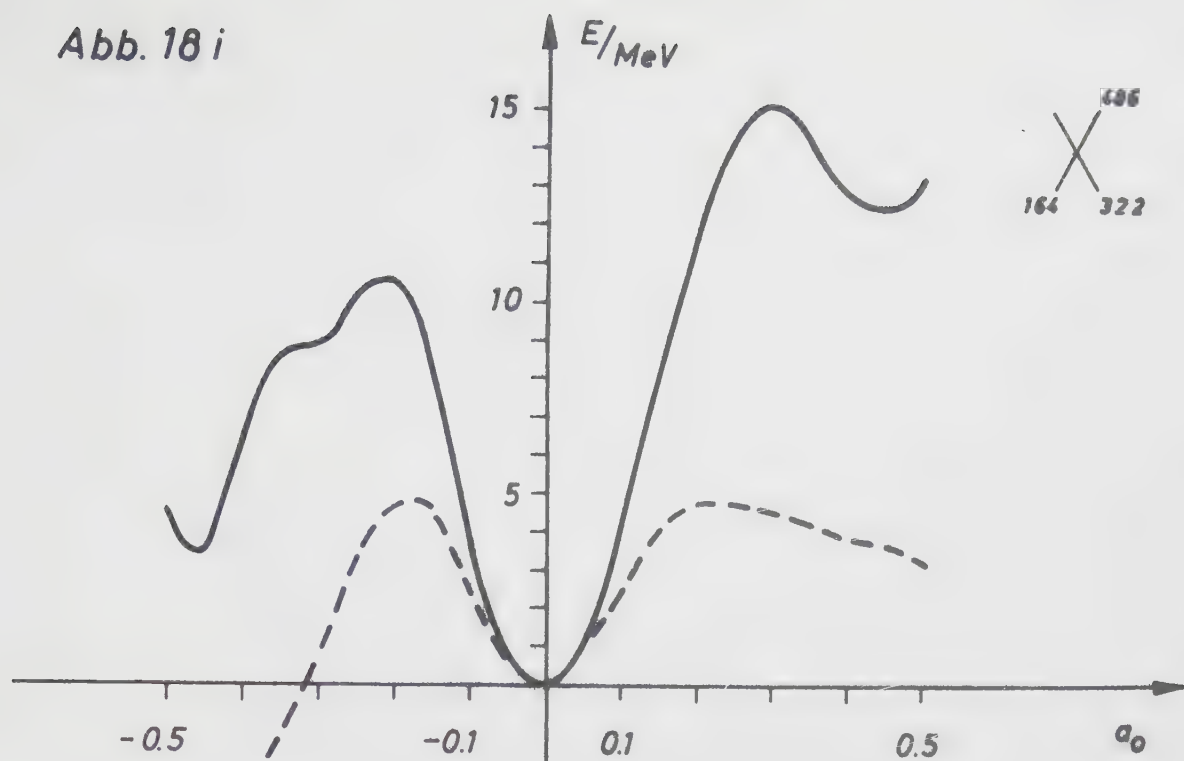


Abb. 19

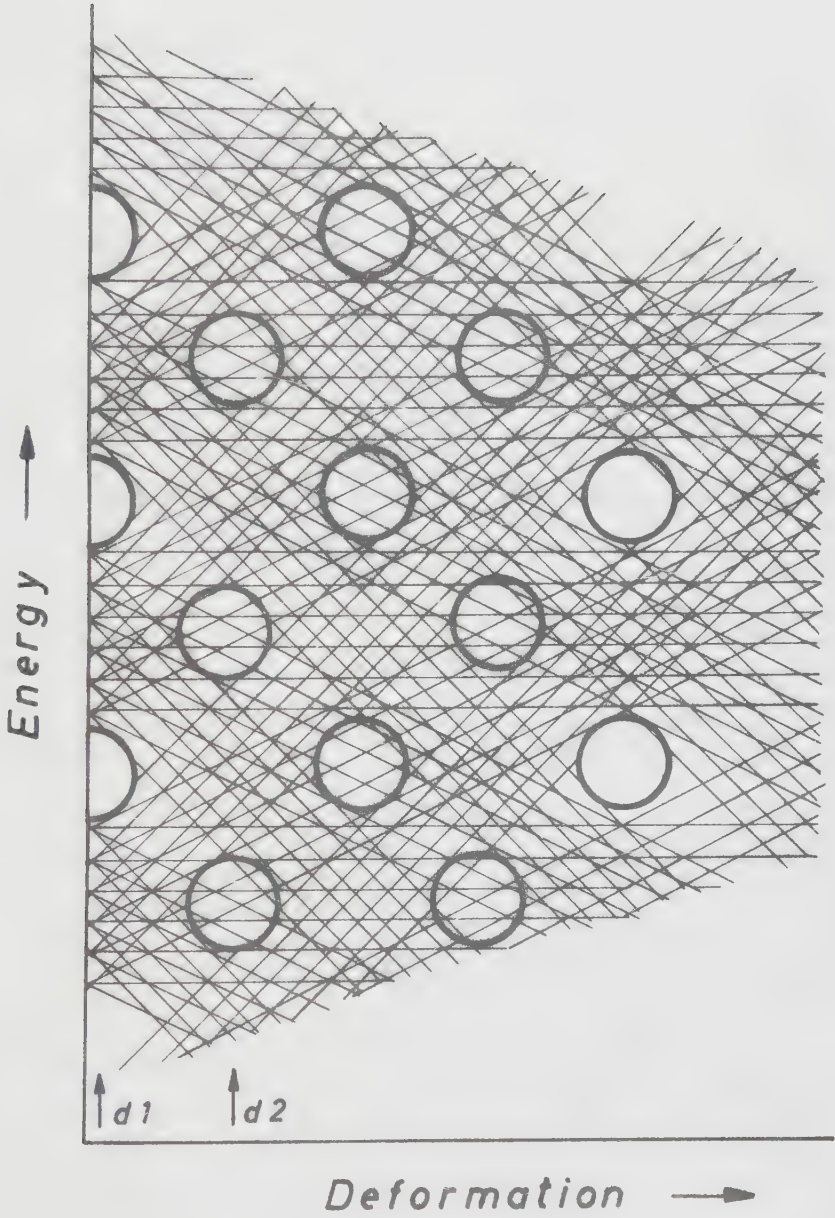
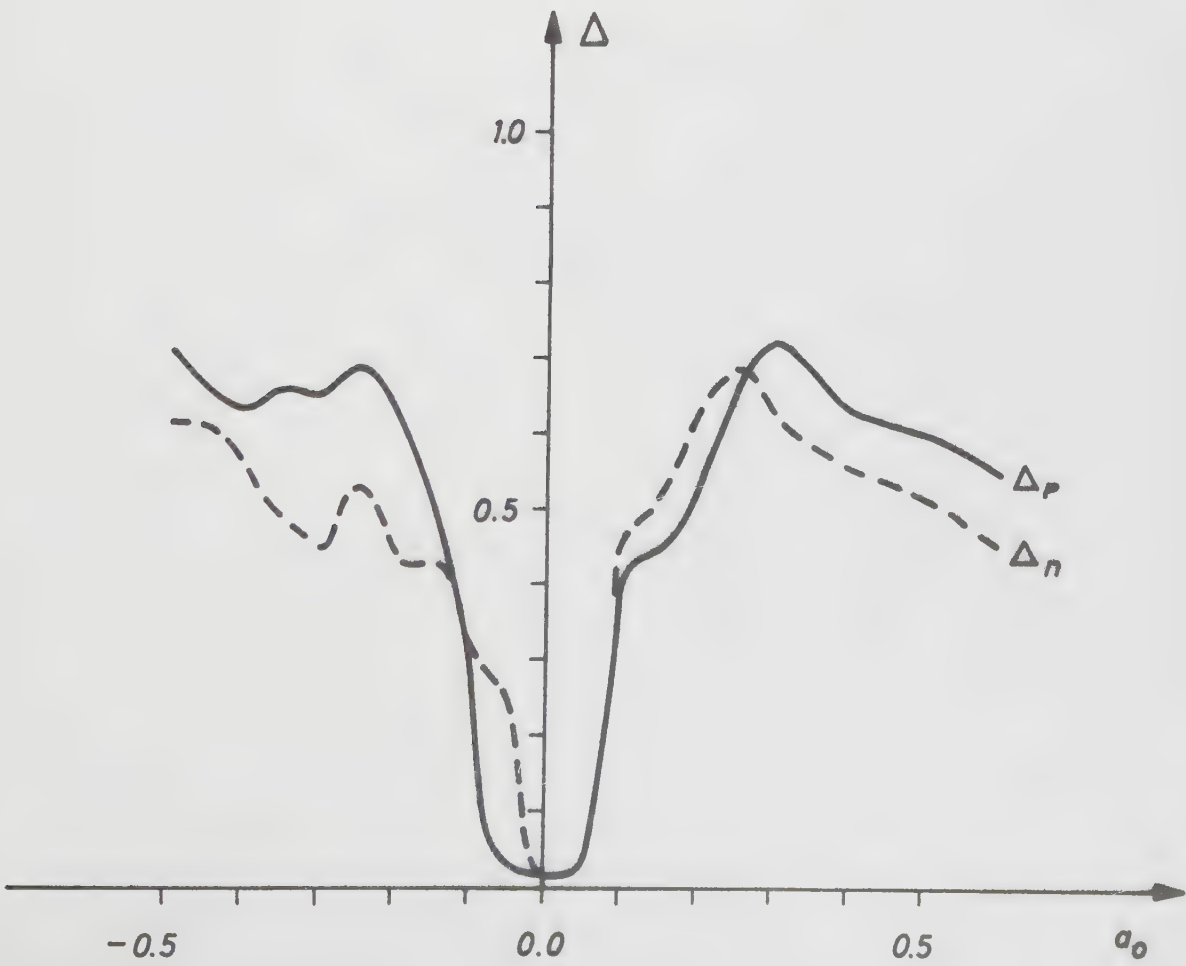
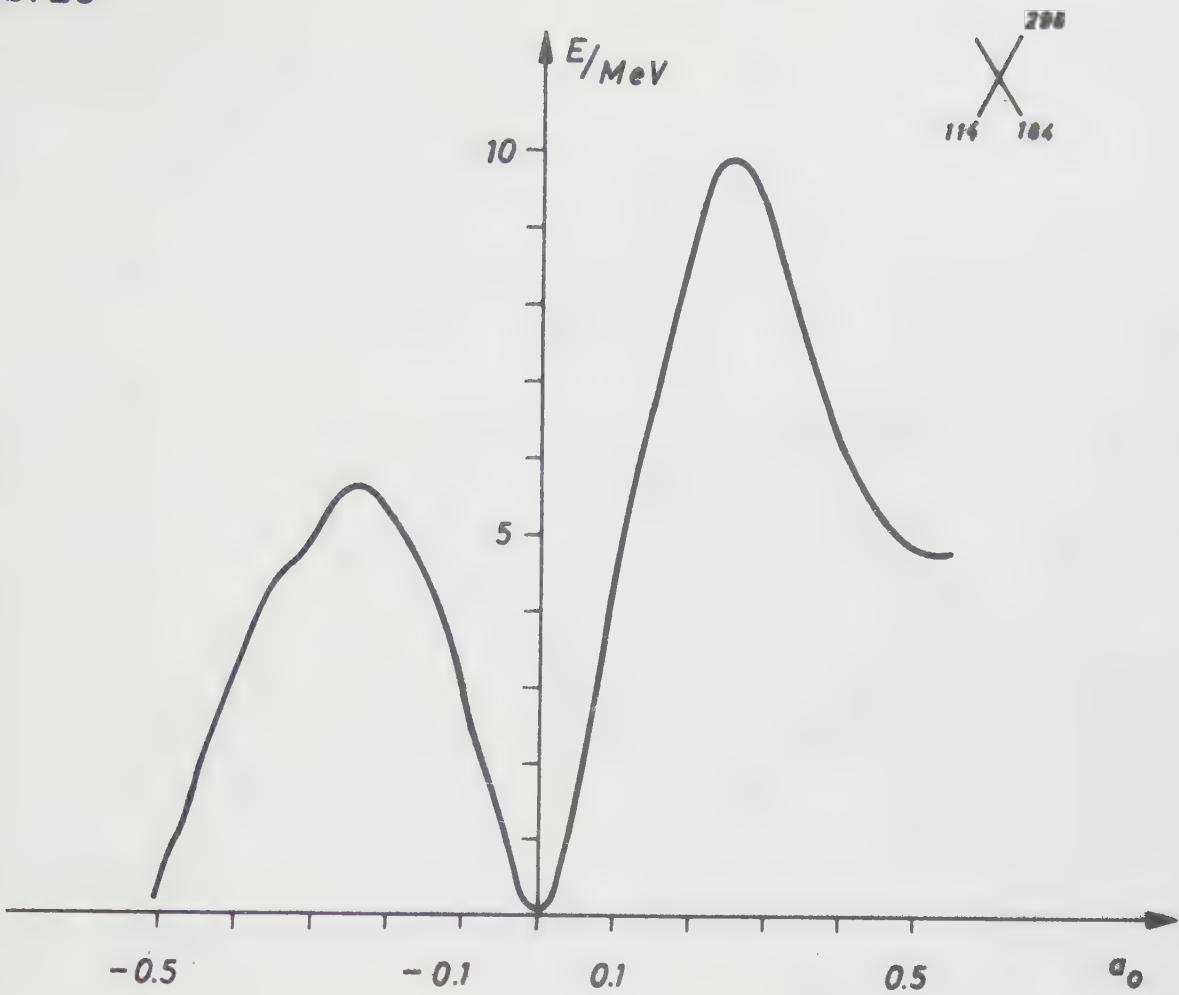


Abb. 20



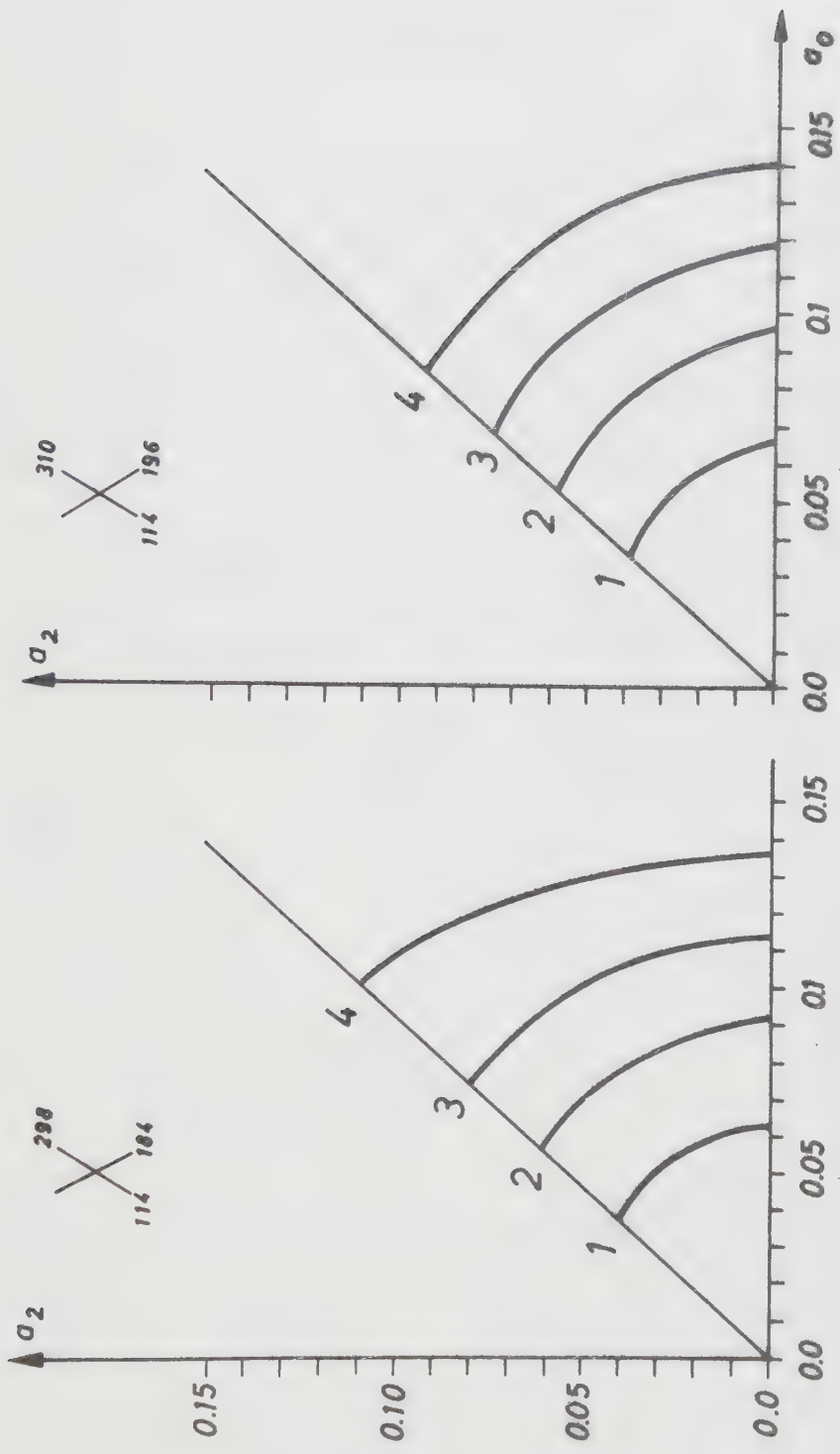
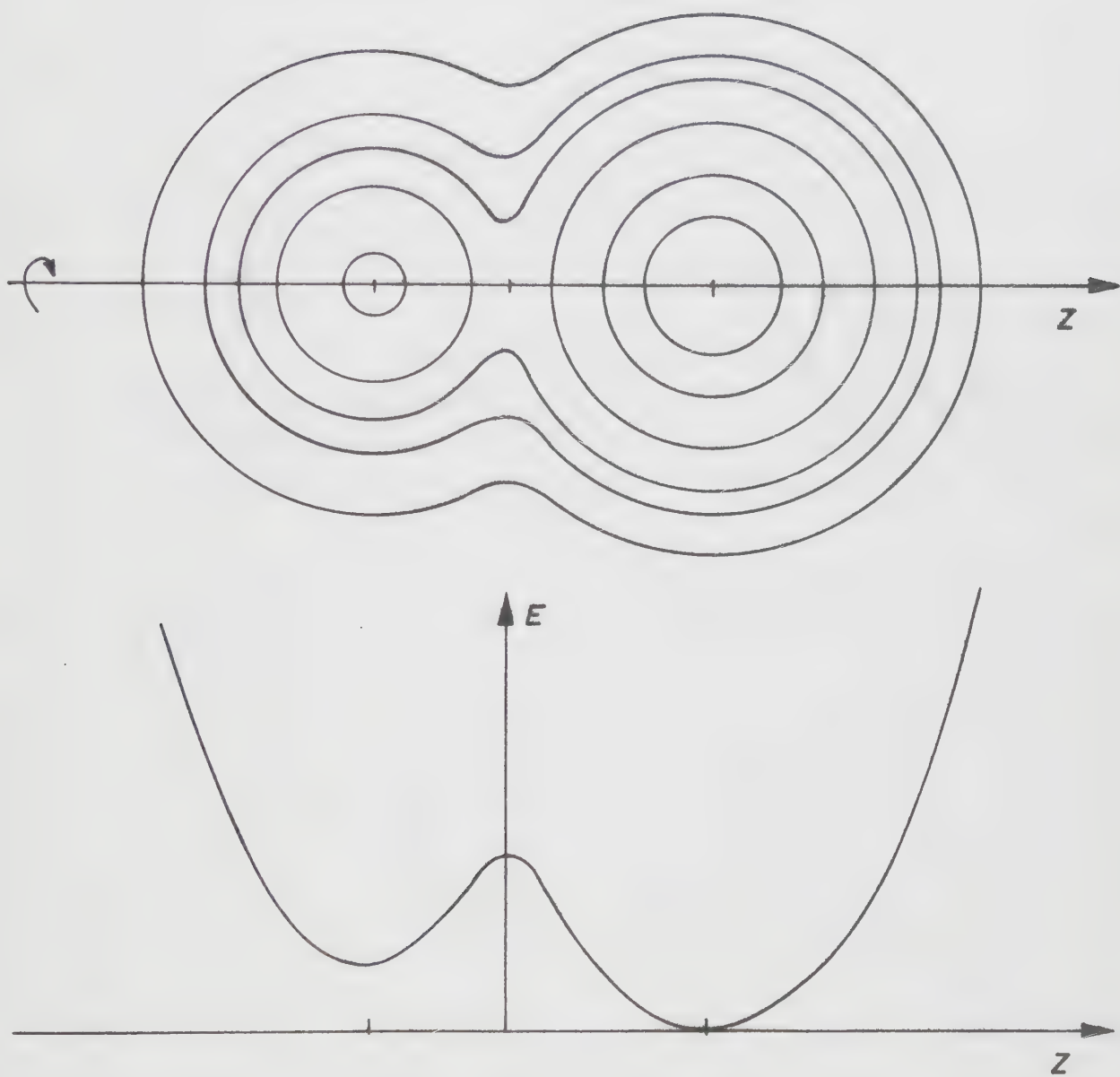


Abb. 21

Abb. 22



Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Greiner danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und insbesondere für sein stetes persönliches Interesse an diesem Thema, das sich in vielen anregenden Diskussionen äußerte.

Mein Dank gilt weiterhin meinen Kollegen K. Albrecht und B. Fink, die mir in vielen Erörterungen halfen, strittige Probleme aufzulösen.

Schließlich danke ich dem Bundesministerium für Wissenschaftliche Forschung und der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die in großzügiger Weise die Mittel für diese Arbeit bereitstellten.

Ferner bedanke ich mich bei Frl. Schäfer und Frau Knolle für ihre Hilfe bei der Fertigstellung des Manuskriptes.

Lebenslauf

Am 8. Februar 1943 wurde ich in Hannover als Sohn des Beamten Hermann Mosel und seiner Ehefrau Elfriede, geb. Börner geboren. Dort besuchte ich auch ab Ostern 1949 die Volksschule und ab Ostern 1953 das altsprachliche Ratsgymnasium. Im Sommer 1958 siedelten meine Eltern nach Frankfurt am Main über, wo ich in das humanistische Lessinggymnasium eintrat. Im Februar 1962 legte ich dort die Reifeprüfung ab und begann im Sommersemester 1962 mit dem Studium der Physik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt a. M.. Dort fertigte ich unter Leitung von Prof. W. Greiner meine Diplomarbeit an und bestand im Februar 1967 die Diplomprüfung. Seit August 1967 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main tätig.

